

# ÍNDICE

<b><u>PORADA</u></b> .....	<b>1</b>
Agradecimientos.....	3
Índice.....	5
Índice de figuras.....	6
Índice de tablas.....	7
Resumen.....	9
Objetivo General.....	9
Objetivos Específicos.....	9
<b><u>1. INTRODUCCIÓN</u></b> .....	<b>11</b>
<b><u>1.1 Aspectos Históricos</u></b> .....	11
<b><u>1.2 Solución De Problemas Con Valores En Las Fronteras</u></b> .....	12
1.2.1 Método De Diferencias Finitas.....	12
1.2.2 Método Variacional.....	12
1.2.3 Método De Elemento Finito (MEF).....	13
<b><u>1.3 Formulación Integral, Método De Residuos Pesados</u></b> .....	14
1.3.1 Procedimiento.....	14
<b><u>2. CONCEPTOS BÁSICOS</u></b> .....	<b>31</b>
<b><u>2.1 Elemento Línea</u></b> .....	31
<b><u>2.2 Propiedades De Las Funciones De Forma</u></b> .....	34
<b><u>2.3 Sistemas Coordenados</u></b> .....	36
<b><u>2.4 Sistemas De Coordenadas Locales s,q</u></b> .....	36
<b><u>2.5 Sistemas Coordenados Naturales</u></b> .....	41
<b><u>2.6 Resumen De Sistemas Coordenados Y Límites De Integración Para Un Elemento Unidimensional</u></b> .....	46
<b><u>2.7 Integración Numérica En Una Dimensión</u></b> .....	47
2.7.1 Cuadratura De Newton-Cotes.....	47
2.7.2 Cuadratura De Gauss-Legendré.....	52
<b><u>2.8 Integración Numérica En Dos Y Tres Dimensiones</u></b> .....	55
<b><u>3. ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES Y BIDIMENSIONALES</u></b> .....	<b>59</b>
<b><u>3.1 Elemento Finito Barra</u></b> .....	59
3.1.1 Matriz De Rigidez En Coordenadas Globales.....	65
<b><u>3.2 Elemento Finito Viga</u></b> .....	97
3.2.1 Matriz De Rigidez Elemental, Elemento Viga.....	101
<b><u>3.3 Matriz De Rigidez Elemental En Coordenadas Globales</u></b> .....	110
<b><u>3.4 Elemento Triangular Lineal</u></b> .....	146
<b><u>3.5 Elemento Rectangular Bilineal</u></b> .....	151
<b><u>3.6 Deformaciones Planas</u></b> .....	158
<b><u>3.7 Esfuerzos Planos</u></b> .....	158
<b><u>3.8 Relaciones Esfuerzo-Deformación</u></b> .....	158
<b><u>3.9 Elemento Triangular</u></b> .....	159
<b><u>4. CONCLUSIONES</u></b> .....	<b>177</b>
<b><u>REFERENCIAS</u></b> .....	<b>181</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO I

- 1.1 Topología de un modelo marco
- 1.2 Dominio de la ecuación diferencial del ejemplo 1.1
- 1.3 Comparación de resultados de los métodos de residuos pesados
- 1.4 Diagrama de momentos flexionantes del ejemplo 1.2
- 1.5 Dominio de la ecuación del ejemplo 1.2

### CAPÍTULO II

- 2.1 Variación lineal entre dos nodos
- 2.2 Grafica de las funciones de forma
- 2.3 Distribución de temperatura del ejemplo 2.1
- 2.4 Funciones de forma del elemento línea, referidas a la izquierda del nodo  $i$
- 2.5 Sistema coordenado local ubicado en el nodo  $i$
- 2.6 Sistema coordenado local ubicado en el centro del elemento
- 2.7 Sistema coordenado local
- 2.8 Sistema coordenado natural
- 2.9 Sistema coordenado local
- 2.10 Función de interpolación
- 2.11 Interpolación polinómica
- 2.12 Interpolación para  $n = 1$
- 2.13 Interpolación para  $n = 2$
- 2.14 Interpolación para  $n = 3$
- 2.15 Elemento cuadrilátero de integración

### CAPÍTULO III

- 3.1 Deformaciones axiales
- 3.2 Elemento diferencial
- 3.3 Fuerzas en la barra
- 3.4 Elementos y nodos de una viga en cantiliver
- 3.5 Relación entre desplazamientos
- 3.6 Fuerzas nodales en coordenadas locales
- 3.7 Armadura del ejemplo 3.2
- 3.8 Topología del modelo
- 3.9 Desplazamientos y giros nodales
- 3.10 Variación de las funciones de forma en el elemento
- 3.11 Giros y desplazamientos nodales elemento viga
- 3.12 Viga del ejemplo 3.5
- 3.13 Topología del modelo
- 3.14 Dirección positiva de los ejes locales  $x-y$ ; y los globales  $x'-y'$
- 3.15 Sentido positivo de los ejes locales
- 3.16 Cargas nodales equivalentes

- 3.17 Marco del ejemplo 3.6
- 3.18 Topología del marco del ejemplo 3.6
- 3.19 Cargas nodales equivalentes en el elemento 2
- 3.20 Coordenadas nodales
- 3.21 Valores y coordenadas nodales
- 3.22 Valores y coordenadas nodales del ejemplo 3.7
- 3.23 Elemento triangular del ejemplo 3.8
- 3.24 Elemento rectangular bilineal
- 3.25 Compatibilidad de elementos
- 3.26 Sistema coordenado con origen en el centro del elemento
- 3.27 Coordenadas locales  $q$  y  $r$
- 3.28 Sistema coordenado con origen en el centro del elemento
- 3.29 Elemento rectangular del ejemplo 3.9
- 3.30 Línea de contorno del ejemplo 3.9
- 3.31 Componentes de desplazamiento
- 3.32 Viga en cantiliver
- 3.33 Topología de la viga
- 3.34 Desplazamientos de la viga en cantiliver
- 3.35 Esfuerzos de la viga en cantiliver

## ÍNDICE DE TABLAS

## CAPÍTULO II

- 2.1 Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de Newton
- 2.2 Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de Gauss



## **RESUMEN**

El Método del Elemento Finito (MEF) ha llegado a ser una herramienta muy poderosa en la solución numérica de un amplio número de problemas en ingeniería. Las aplicaciones van desde el análisis de esfuerzos y deformaciones en aeronaves, edificios, barcos, automóviles, puentes, además de problemas de flujo de calor en cuerpos, de fluidos, campos magnéticos, filtraciones, etc. Con el avance de la tecnología de los procesadores pueden modelarse problemas complejos con relativa facilidad. En la actualidad existe un gran número de programas comerciales y de investigación cuyo planteamiento es con base en el MEF.

En este Método una región compleja que define un medio continuo se discretiza en formas geométricas simples llamadas elementos finitos. Sobre esos elementos se consideran las propiedades del material y las relaciones gobernantes, expresadas en términos de valores desconocidos en las fronteras del elemento. El sistema de ecuaciones de equilibrio se logra cuando se ensamblan las cargas y condiciones de apoyo. La solución de esas ecuaciones de equilibrio dan lugar a una solución aproximada en el continuo.

## **OBJETIVO GENERAL**

Establecer en forma clara y completamente didáctica los fundamentos matemáticos del método del elemento finito con base en la teoría elástica lineal para que la población profesional de ingeniería civil aplique correctamente por medio de programas comerciales la teoría.

## **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Desarrollar la teoría del Elemento Finito mediante la formulación integral al resolver numéricamente ecuaciones diferenciales.
- Desarrollar técnicas numéricas utilizando los sistemas coordenados para la evaluación de integrales cuya solución analítica es imposible.
- Resolver por medio del elemento finito los diferentes elementos unidimensionales y bidimensionales.



## CAPÍTULO I

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Las ideas básicas del Método se originaron gracias al avance en el análisis de estructuras de aeronaves. En 1941, Hrenikoff presentó una solución de problemas de la elasticidad usando el “método de trabajo del marco”[1]. En un artículo publicado en 1943[2], Courant usó interpolación polinomial por partes sobre subregiones triangulares para modelar problemas de torsión. Turner y otros investigadores obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y presentaron sus hallazgos en 1956. Clough, en 1960, fue el primero en emplear el término de elemento finito[3].

En los primeros años de la década de 1960 los ingenieros usaron el método para obtener soluciones aproximadas a problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor y otras áreas. En 1955 Argyris cimentó el análisis del elemento, publicando los teoremas de energía y métodos matriciales[4]. El primer libro sobre elementos finitos fue publicado por Zienkiewicz y Cheng, en 1967[5]. A fines de la década de 1960 y principios de la siguiente, el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones. Oden publicó su libro sobre aplicaciones no lineales en 1972. Las bases matemáticas se establecieron en la década de 1970.

Actualmente se cuenta con una gran cantidad de programas comerciales de elemento finito, tales como: SAP 2000, Ansis, Adina, etc.

- [1] A.Hrenikoff, ‘Solution of problems in elasticity by the framework method’, *J. Appl..Mech.*,A8,169-75, 1941.
- [2] R. Courant, ‘Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration’, *Bull.Am.Math.Soc.*,49,1-23,1943.
- [3] R.W. Clough, ‘The finite element in plane stress analysis’, *Proc.2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.
- [4] J.H. Argyris, *Energy theorems and structural análisis*, Butterworth, 1960 (reproducido de *Aircraft Eng.*, 1954-55).
- [5] O.C Zienkiewicz, Y.K. Cheng ‘The finite element method, (1967).

## 1.2 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON VALORES EN LAS FRONTERAS

Existen varios métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales:

- 1) Método de Diferencias Finitas (MDF)
- 2) Métodos Variacionales
- 3) Métodos Integrales o Elementos de Frontera (MEF)
- 4) Método de Elemento Finito (MEF)
  - 4.1) Método basado en una formulación integral (Residuos Pesados)
  - 4.2) Método basado en una formulación energética (Formulación General)

### 1.2.1 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Este método aproxima las derivadas en la ecuación diferencial usando ecuaciones en diferencia o en incrementos. Se utiliza para resolver problemas de transferencia de calor, mecánicos, de fluidos y problemas bidimensionales con fronteras paralelas a los ejes coordinados. El método es difícil de aplicar a una región curva o fronteras irregulares.

### 1.2.2 MÉTODO VARIACIONAL

Involucra la integral de una función que produce un número, cada nueva función produce un número más bajo. La función que produce un número más bajo, tiene la propiedad adicional de satisfacer una ecuación diferencial específica. El Método Variacional, es la base de muchas formulaciones del elemento finito, pero tiene la desventaja, que no es aplicable a ninguna ecuación diferencial que contenga un término en la primera derivada. En ingeniería civil las ecuaciones de elementos mecánicos están gobernadas por ecuaciones diferenciales de segundo grado y en el caso de placas de cuarto grado.

### 1.2.3 MÉTODO DE ELEMENTO FINITO (MEF)

Es un procedimiento numérico para resolver problemas físicos gobernados por una ecuación diferencial o un teorema de energía. Dos de las características que lo distinguen de otros métodos son:

- El método utiliza una formulación integral para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.
- El método utiliza funciones continuas para la aproximación de una cantidad o cantidades desconocidas.

La segunda característica distingue al MEF de otros procedimientos numéricos que utilizan una formulación integral. El MEF se puede dividir en cinco partes:

- Se discretiza la región: Esto incluye la localización y numeración de puntos nodales, así como especificar el sistema coordenado (topología Fig. 1.1).

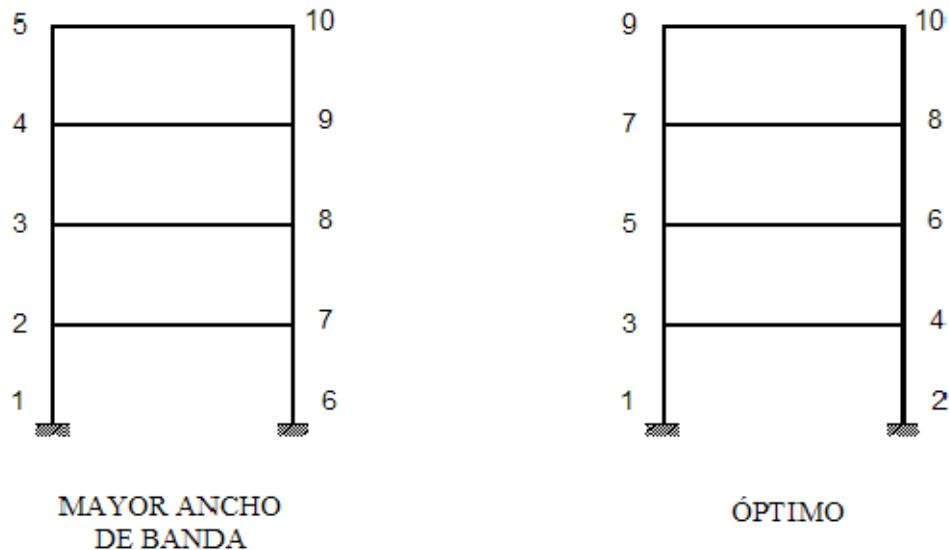


Fig. 1.1 Topología de un modelo marco.

- Especificar la ecuación de aproximación

Se debe especificar el orden de aproximación lineal o cuadrática y la ecuación debe de escribirse en términos de valores nodales desconocidos. Se escribe una ecuación para cada elemento.

- 3) Desarrollar el sistema de ecuaciones usando el método de formulación integral de Galerkin (Residuos Pesados) o la transformación energética.
- 4) Resolver el sistema de ecuaciones.
- 5) Calcular las cantidades de interés o incógnitas, que usualmente son las derivadas de los parámetros que incluyen las componentes de esfuerzos, deformaciones, etc.

Existen dos enfoques para abordar la solución de problemas en el MEF:

- a) Formulación Integral
- b) Formulación Energética

### **1.3 FORMULACIÓN INTEGRAL, MÉTODO DE RESIDUOS PESADOS**

Los métodos numéricos más usados para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias son los conocidos como Método de Residuos Pesados. Estos métodos empiezan por suponer una solución a la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones de frontera. Dicha solución contendrá ciertos parámetros de los cuales pueden ser ajustados para minimizar los errores.

Existen diferentes métodos para minimizar el error o residuo, tal que dicha solución propuesta se aproxime tanto como sea posible a la solución exacta. Los Métodos de Residuos Pesados son:

- 1) Método de Colocación Puntual.
- 2) Método de Galerkin.
- 3) Método de Mínimos Cuadrados.
- 4) Método del Subdominio.

[Referencia] ‘Análisis Avanzado de Estructuras’, apuntes del Ing. Hugo Hernández Barrios.

#### **1.3.1 PROCEDIMIENTO**

- i) Se tiene una ecuación diferencial.

$$\delta\Phi = F \quad \text{en } \Omega \quad \text{de la ecuación diferencial} \quad (1.1)$$

donde:

$\delta$  es el operador diferencial  $\left[ \frac{d^2}{dx^2}, \frac{d}{dt}, \dots \right]$

$\Phi$  es una variable  $[u, v, w, t, \dots]$

$F$  es una función.

$\Omega$  es el dominio de la región

ii) Se supone una solución a la ecuación.

$$\Phi^* \approx \Phi \quad (1.2)$$

donde  $\Phi^*$  es una aproximación a la solución cerrada,  $\Phi$ , tal que se puede escribir como un polinomio,

$$\Phi^* = \sum_{i=1}^n C_i f_i \quad (1.3)$$

$$\Phi^* = f_0(x) + C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots \quad (1.4)$$

donde  $f(x)$  puede ser cero.

La solución supone que las funciones,  $f_0, f_1, f_2, \dots$  satisfacen las condiciones de frontera de la ecuación diferencial y contiene un número “indeterminado” de parámetros  $C_1, C_2, \dots$

iii) Se sustituye  $\Phi^*$  en la ecuación diferencial,

$$\delta\Phi^* = F \quad \text{en } \Omega \quad (1.5)$$

$$\delta\Phi^* - F = 0 \quad (1.6)$$

sólo si  $\Phi^*$  es igual a la solución exacta, en otro caso:

$$\delta\Phi^* - F = R \quad (1.7)$$

donde  $R$  es el Residuo o error

iv) Se encuentran los valores de  $C_1, C_2, \dots$  incógnitas que minimizan el error ( $R$ ) en el dominio de la solución  $A \leq x \leq B$  (condiciones de frontera).

v) Se pesa o pondera el error en todo el dominio de la función por medio de una función de peso,  $W_i$ .

$$\int_{\Omega} [\delta\Phi^* - F] W_i d\Omega = 0 \quad (1.8)$$

es decir:

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0 \quad (1.9)$$

donde el error o residuo es:

$$R = [\delta\Phi^* - F] \quad (1.10)$$

La mejor aproximación de la solución de la ecuación diferencial, minimiza el error,  $R$ . Dependiendo del peso  $W_i$  que se proponga, será el método utilizado, así,

a) Se conoce como *Método de Colocación Puntual* si la función de peso es:

$$W_i = \delta(x_i) \quad (1.11)$$

donde  $\delta(x_i)$  es la función Delta de Dirac evaluada en un punto en el dominio.

Por definición:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x_i) G(x_i) dx = G(x_i) \quad \text{en donde: } x_1 \leq x_i \leq x_2 \quad (1.12)$$

b) Se conoce como el *Método de Galerkin* si la función de peso es:

$$W_i = f_i \quad (1.13)$$

donde  $f_i$  es un polinomio (una función) del mismo orden que la función de aproximación  $\Phi^*$ .

c) Se conoce como el *Método de Mínimos Cuadrados* si,

$$W_i = \varepsilon = R \quad (1.14)$$

la función de peso es el mismo error, el cual se minimiza:

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left[ \int_{\Omega} \varepsilon \cdot \varepsilon d\Omega \right] = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_i} \left[ \int_{\Omega} [R]^2 d\Omega \right] = 0 \quad (1.16)$$

haciendo

$$\varepsilon \cdot R = \int_{\Omega} [R]^2 d\Omega \quad (1.17)$$

se tiene un nuevo error.

$$\frac{\partial \varepsilon \cdot R}{\partial C_i} = 0 \quad (1.18)$$

se minimiza el nuevo error.

d) Se conoce como el *Método de Momentos o del Subdominio* si,

$$W_i = x^j \quad (1.19)$$

la función de peso es un polinomio:  $x^j$ .

### EJEMPLO 1.1

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = -x \quad \text{en } 0 \leq t \leq 1 \quad (1.20)$$

Usando:

- a. El método de colocación puntual.
- b. El método de Galerkin
- c. El método de momentos o del subdominio

La condición inicial es:

$$x = 1 \text{ en } t = 0 \quad (1.21)$$

I. Se propone como solución aproximada un polinomio de segundo grado,

$$x^* = 1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 \quad (1.22)$$

que satisface:

$$x^* = 1 \text{ en } t = 0 \quad (1.23)$$

II. Se sustituye en la ecuación diferencial original,

$$\frac{dx^*}{dt} + x^* = R \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt} [1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2] + [1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2] = R \quad (1.25)$$

desarrollando,

$$C_1 + 2C_2 \cdot t + 1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 = R \quad (1.26)$$

tomando términos comunes, el error es:

$$C_1 [1 + t] + C_2 [2t + t^2] + 1 = R \quad (1.27)$$

III. Se minimiza el error:

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0 \quad (1.28)$$

#### a) MÉTODO DE COLOCACIÓN PUNTUAL

El dominio de la ecuación diferencial se muestra en la figura 1.2:

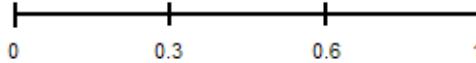


Fig. 1.2 Dominio de la ecuación diferencial del ejemplo 1.1.

Existen dos incógnitas o parámetros desconocidos:  $C_1$  y  $C_2$  por lo que se necesitan dos valores de peso,

$$W_1 = \delta(0.30) \quad (1.29)$$

$$W_2 = \delta(0.60) \quad (1.30)$$

Evaluando las ecuaciones (1.29) y (1.30) en el dominio de la ecuación diferencial,

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot \delta(0.30) dt = 0 \quad (1.31)$$

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot \delta(0.60) dt = 0 \quad (1.32)$$

por definición:

$$\int_{x1}^{x2} \delta(x_i) G(x) dx = G(x_i) \quad (1.33)$$

tal que la solución de las integrales son:

$$C_1(1+0.30) + C_2(2(0.30)+(0.30)^2) + 1 = 0 \quad (1.34)$$

$$C_1(1+0.60) + C_2(2(0.60)+(0.60)^2) + 1 = 0 \quad (1.35)$$

$$1.30C_1 + 0.69C_2 + 1 = 0 \quad (1.36)$$

$$1.60C_1 + 1.56C_2 + 1 = 0 \quad (1.37)$$

Resolviendo el sistema:

$$C_1 = -0.9414 \quad (1.38)$$

$$C_2 = 0.3245 \quad (1.39)$$

Sustituyendo en la solución propuesta:  $x^* = 1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2$ , la solución aproximada es:

$$x^* = 1 - 0.9414t + 0.3245t^2 \quad (1.40)$$

### b) MÉTODO DE GALERKIN

Se necesitan dos funciones de peso ya que existen dos parámetros incógnitas,  $C_1$  y  $C_2$ , se proponen:

$$W_1 = t \quad (1.41)$$

$$W_2 = t^2 \quad (1.42)$$

En donde al menos un polinomio es del mismo orden que la función de aproximación, en este caso de segundo orden.

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0 \quad (1.43)$$

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot t dt = 0 \quad (1.44)$$

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot t^2 dt = 0 \quad (1.45)$$

Resolviendo las integrales:

$$\int_0^1 [C_1(t+t^2) + C_2(2t^2+t^3) + t] dt = 0 \quad (1.46)$$

$$C_1 \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right] + C_2 \left[ \frac{2t^2}{3} + \frac{t^4}{4} \right] + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 0 \quad (1.47)$$

$$C_1 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] + C_2 \left[ \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] + \frac{1}{2} = 0 \quad (1.48)$$

$$0.8333C_1 + 0.9166C_2 + 0.50 = 0 \quad (1.49)$$

Para la segunda integral:

$$\int_0^1 \left[ C_1(t^2 + t^3) + C_2(2t^3 + t^4) + t^2 \right] dt = 0 \quad (1.50)$$

$$C_1 \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right] + C_2 \left[ \frac{2t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right] + \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 0 \quad (1.51)$$

$$C_1 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + C_2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] + \frac{1}{3} = 0 \quad (1.52)$$

$$0.5833C_1 + 0.70C_2 + 0.3333 = 0 \quad (1.53)$$

Resolviendo simultáneamente (1.49) y (1.53):

$$0.8333C_1 + 0.9166C_2 + 0.50 = 0 \quad (1.49)$$

$$0.5833C_1 + 0.70C_2 + 0.3333 = 0 \quad (1.53)$$

Se tiene,

$$C_1 = -0.9145 \quad (1.54)$$

$$C_2 = 0.2859 \quad (1.55)$$

Sustituyendo en la solución propuesta:  $x^* = 1 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2$  la solución aproximada es:

$$x^* = 1 - 0.91456t + 0.2859t^2 \quad (1.56)$$

### c) MÉTODO DE MOMENTOS O SUBDOMINIO

La función de peso es:  $W_i = x^j$ , se proponen:

$$W_1 = t^2 \quad (1.57)$$

$$W_2 = t^3 \quad (1.58)$$

por existir dos parámetros  $C_1$  y  $C_2$ , incógnitas. Por lo que en:

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0 \quad (1.59)$$

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot t^2 dt = 0 \quad (1.60)$$

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot t^3 dt = 0 \quad (1.61)$$

Para la primera integral:

$$\int_0^1 [C_1(t^2+t^3) + C_2(2t^3+t^4) + t^2] dt = 0 \quad (1.62)$$

$$C_1 \left[ \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right] + C_2 \left[ \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right] + \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 0 \quad (1.63)$$

$$C_1 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + C_2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right] + \frac{1}{3} = 0 \quad (1.64)$$

realizando operaciones:

$$0.5833C_1 + 0.70C_2 + 0.3333 = 0 \quad (1.65)$$

Para la segunda integral:

$$\int_0^1 [C_1(1+t) + C_2(2t+t^2) + 1] \cdot t^3 dt = 0 \quad (1.66)$$

$$\int_0^1 [C_1(t^3+t^4) + C_2(2t^4+t^5) + t^3] dt = 0 \quad (1.67)$$

$$C_1 \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right] + C_2 \left[ \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6} \right] + \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = 0 \quad (1.68)$$

$$C_1 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right] + C_2 \left[ \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right] + \frac{1}{4} = 0 \quad (1.69)$$

realizando operaciones:

$$0.45C_1 + 0.5666C_2 + 0.25 = 0 \quad (1.70)$$

Resolviendo simultáneamente:

$$0.5833C_1 + 0.70C_2 + 0.3333 = 0 \quad (1.71)$$

$$0.45C_1 + 0.5666C_2 + 0.25 = 0 \quad (1.72)$$

Se tiene:

$$C_1 = -0.8935 \quad (1.73)$$

$$C_2 = 0.2684 \quad (1.74)$$

$$x^* = 1 - 0.8935t + 0.2684t^2 \quad (1.75)$$

RESUMEN:

La ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1.76)$$

acepta la solución:

$$x = e^{-t} \quad (1.77)$$

Tal que:

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} \quad (1.78)$$

Sustituyendo en la ecuación (1.76),

$$-e^{-t} + e^{-t} = 0 \quad (1.79)$$

Por lo que la solución exacta de la ecuación diferencial (1.76) es:

$$x = e^{-t} \quad (1.80)$$

Las soluciones numéricas anteriormente calculadas son:

Método de Colocación Puntual:  $x^* = 1 - 0.9414t + 0.3245t^2$

Método de Galerkin:  $x^* = 1 - 0.91456t + 0.2859t^2$

Método del Subdominio:  $x^* = 1 - 0.8935t + 0.2684t^2$

En la Figura 1.3 se observan las gráficas de las soluciones numéricas en el intervalo de solución  $0 \leq t \leq 1$ .

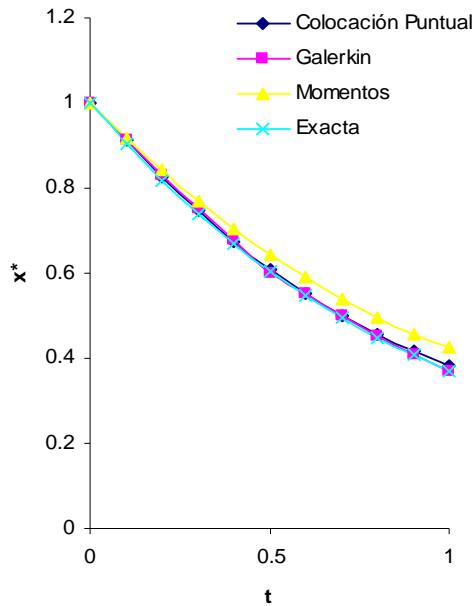


Fig. 1.3 Comparación de resultados de los métodos de residuos pesados.

#### COMENTARIOS:

- I. Para este problema en particular, el método de colocación puntual y el de Galerkin se aproximan mejor a la solución exacta que el del Subdominio.
- II. El método de colocación puntual, depende de los puntos que se elijan para la solución y que además deben pertenecer al dominio de la ecuación.
- III. El método del Subdominio tiene la desventaja que no se tiene control, en caso de programarse, del orden del polinomio.
- IV. El método de Galerkin, es el más fácil de programar ya que se puede colocar la función de peso igual al polinomio de aproximación.

**EJEMPLO 1.2**

Resolver la siguiente viga usando:

- a) Método de colocación puntual
- b) Método de galerkin
- c) Método de mínimos cuadrados

La ecuación que gobierna el momento flexionante en una viga es:

$$M_{(x)} = EI \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.81)$$

Donde  $y$  es la flecha o deformada de una viga. Para el caso en particular de la viga simplemente apoyada sometida a un momento flexionante,  $M_o$ , en sus extremos, como se observa en la Figura 1.4, las condiciones de frontera son:

$$\text{En } x = 0 : \quad y = 0 \quad (1.82)$$

$$\text{En } x = L : \quad y = 0 \quad (1.83)$$

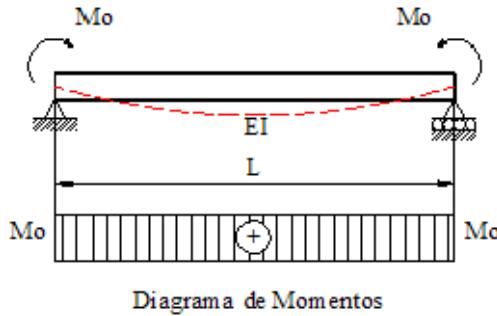


Fig. 1.4 Diagrama de momentos flexionantes del ejemplo 1.2.

La solución exacta del problema es la ecuación:

$$y_{(x)} = \frac{Mox}{2EI} (x - L) \quad (1.84)$$

De la ecuación diferencial (1.81) se tiene que la ecuación a resolver es:

$$M_{(x)} - EI \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (1.85)$$

Se propone una aproximación a la solución del tipo:

$$y_{(x)}^* = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (1.86)$$

Que satisface las condiciones:

$$x = 0 : y^* = 0 \quad (1.87a)$$

$$x = L : y^* = 0 \quad (1.87b)$$

Sustituyendo  $M_{(x)} = M_o$  en la ecuación (1.85), la ecuación diferencial a resolver es:

$$Mo - EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (1.88)$$

Sustituyendo la aproximación a la solución:

$$Mo - EI \frac{d^2 y^*}{dx^2} = R \quad (1.89)$$

Donde según (1.86)

$$y_{(x)}^* = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (1.86)$$

es la aproximación a la solución. Sustituyendo en (1.89),

$$Mo - EI \frac{d^2}{dx^2} \left[ A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \right] = R \quad (1.90)$$

Es necesario calcular las primeras dos derivadas de (1.86):

$$\frac{dy_{(x)}^*}{dx} = A \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (1.91)$$

$$\frac{d^2 y_{(x)}^*}{dx^2} = -A \frac{\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (1.92)$$

Sustituyendo en (1.90) se tiene:

$$Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} = R \quad (1.93)$$

### a) MÉTODO DE COLOCACIÓN PUNTUAL

Se pesa el error,

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0$$

el dominio de la ecuación es:

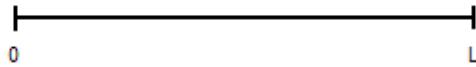


Fig. 1.5 Dominio de la ecuación del ejemplo 1.2.

La función delta de Dirac se evaluará en  $x = \frac{L}{2}$ . Se tiene un sólo parámetro incógnita “A”.

Sustituyendo:

$$\int_0^L \left[ Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right] \delta\left(\frac{L}{2}\right) dx = 0$$

resolviendo la integral:

$$Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi}{L} \left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

$$Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} = 0$$

Despejando:

$$A = -\frac{MoL^2}{\pi^2 EI}$$

Sustituyendo en la solución aproximada, (1.86):

$$y_{(x)}^* = \left( -\frac{MoL^2}{\pi^2 EI} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \frac{\pi x}{L} \quad (1.5)$$

## b) MÉTODO DE GALERKIN

Se pesa el error,

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0$$

La función de peso,  $W_i$ , es de la misma forma matemática que la función de aproximación,

$$W_i = \sin \frac{\pi x}{L}$$

Sustituyendo:

$$\int_0^L \left[ Mo + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right] \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0$$

$$Mo \int_0^L \sin \frac{\pi x}{L} dx + EI \frac{A\pi^2}{L^2} \int_0^L \left( \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2 dx = 0$$

Para resolver las integrales, se recurre a las siguientes fórmulas:

$$\int \sin(mx) dx = -\frac{\cos(mx)}{m}$$

$$\int \sin^2 u \cdot dx = -\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{u}{2}$$

si:  $u = \frac{\pi x}{L}$  ;  $du = \frac{\pi}{L} dx$

$x = \frac{uL}{\pi}$  ;  $\frac{L}{\pi} du = dx$

$$Mo \left[ -\frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi x}{L} \right]_0^L + EIA \frac{\pi^2}{L^2} \frac{L}{\pi} \left[ -\frac{1}{4} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{\pi x}{2} \right]_0^L = 0$$

$$-\frac{MoL}{\pi} \cos \left( \frac{\pi x}{L} \right) \Big|_0^L + EIA \frac{\pi}{L} \left[ -\frac{1}{4} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{\pi x}{2L} \right]_0^L = 0$$

$$-Mo \frac{L}{\pi} [\cos(\pi) - \cos(0)] + EIA \frac{\pi}{L} \left[ -\frac{1}{4} \sin \frac{2\pi}{L} (L) + \frac{1}{4} \sin(2\pi(0)) + \frac{\pi(L)}{2L} - \frac{\pi(0)}{2L} \right] = 0$$

$$-Mo \frac{L}{\pi} [-1 - 1] + EIA \frac{\pi}{L} \left[ -\frac{1}{4} \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin(0) + \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

$$2Mo \frac{L}{\pi} + EIA \frac{\pi}{L} \left[ \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

Despejando la incógnita:  $A = -2Mo \frac{L}{\pi} \left[ \frac{2L}{EI\pi^2} \right]$

Se tiene,

$$A = -\frac{4Mo}{EI} \frac{L^2}{\pi^3}$$

Sustituyendo en la solución aproximada (1.86):

$$y_{(x)}^* = -\frac{4Mo}{EI} \frac{L^2}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (1.6)$$

### c) MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

Se trata de encontrar un nuevo error:

$$\in R = \int [R(x)]^2$$

Así, el nuevo error es:

$$\in R = \int \left[ Mo + EIA \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right]^2 dx$$

Desarrollando:

$$\in R = \int_0^L \left[ Mo^2 + 2MoEIA \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} + \left[ EIA \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right] dx$$

$$\in R = \left\{ Mo^2 x + 2MoEIA \frac{\pi^2}{L^2} \left( \frac{L}{\pi} \right) \left[ -\cos \frac{\pi x}{L} \right] + \left[ EIA \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2 \left[ \frac{L}{\pi} \right] \left[ -\frac{1}{4} \sin 2\pi x + \frac{\pi x}{2L} \right] \right\} \Big|_0^L$$

$$\in R = \left\{ Mo^2 - 2MoEIA \frac{\pi}{L} \left[ -\cos \pi - \cos(0) \right] + \left[ EIA \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2 \left[ \frac{\pi}{L} \right] \left[ -\frac{1}{4} \sin 2\pi + \frac{1}{4} \sin(0) + \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

$$\in R = Mo^2 L + 4MoEIA \frac{\pi}{L} + \left[ EIA \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2 \left[ \frac{L}{\pi} \right] \left[ \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\in R = Mo^2 L + 4MoEIA \frac{\pi}{L} + \left[ EIA \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2 \left[ \frac{L}{2} \right]$$

El nuevo error es:

$$\in R = Mo^2 L + A \left[ 4MoEI\pi \right] + A^2 \left[ \frac{L}{\pi} \right] \left[ EI \frac{\pi^2}{L^2} \right]^2$$

Minimizando el nuevo error con respecto a “A”;  $\frac{\partial \in R}{\partial A} = 0$

$$\frac{\partial \in R}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \left\{ Mo^2 L + A \left[ \frac{4MoEI\pi}{L} \right] + A^2 \left[ \frac{L}{2} \right] \left[ \frac{EI\pi^2}{L^2} \right] \right\} = 0$$

$$\frac{4MoEI\pi}{L} + AL \left[ \frac{EI\pi^2}{L^2} \right] = 0$$

despejando,  $A = -4Mo \frac{L^2}{EI\pi^3}$

y sustituyendo en la solución aproximada (1.86):

$$y_{(x)}^* = -\frac{4Mo}{EI} \frac{L^2}{\pi^3} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (1.7)$$

RESUMEN:

Resumiendo, las soluciones son:

Solución exacta:  $y_{(x)} = \frac{Mo x}{2EI} (x - L)$  (1.84)

Método de Colocación Puntual:  $y_{(x)}^* = -\frac{Mo L^2}{\pi^2 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$  (1.5)

Método de Galerkin:  $y_{(x)}^* = -\frac{4Mo}{EI} \frac{L^2}{\pi^3} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$  (1.6)

Método de Mínimos Cuadrados:  $y_{(x)}^* = -\frac{4Mo}{EI} \frac{L^2}{\pi^3} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$  (1.7)

Comentarios:

- I. Para este caso, no es posible establecer cuál método es el más exacto, el error depende de la función de aproximación y de la ecuación resuelta.
- II. Los puntos de colocación o subregiones seleccionadas afectan la exactitud de la solución.
- III. Lo importante de esta sección es ver que la solución numérica de ecuaciones diferenciales se pueden formular en términos de una integral. La formulación integral es una característica del MEF.



## CAPÍTULO II

### CONCEPTOS BÁSICOS

#### 2.1 ELEMENTO LÍNEA

El elemento línea (método de interpolación) es un segmento de línea con longitud  $L$  y dos nodos, uno en cada extremo. Los nodos son denotados por  $i$  y  $j$  y los valores nodales por  $\Phi_i$  y  $\Phi_j$ . El origen del sistema coordenado está en la izquierda del nodo  $i$ .

El parámetro  $\Phi$  varía linealmente entre los nodos (Fig. 2.1), por lo que la función de variación es:

$$\phi = a_1 + a_2 x \quad (2.1)$$

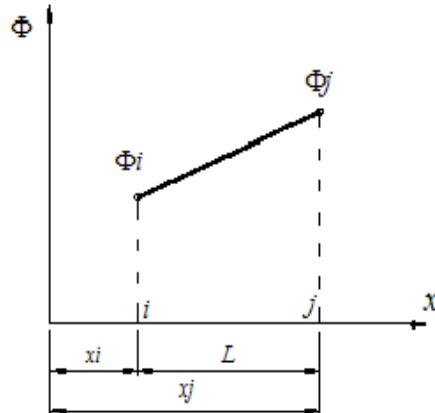


Fig. 2.1 Variación lineal entre dos nodos.

Los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  se determinan con las condiciones en los nodos.

$$\phi = \Phi_i \quad \text{en} \quad x = x_i \quad (2.2)$$

$$\phi = \Phi_j \quad \text{en} \quad x = x_j \quad (2.3)$$

Sustituyendo en (2.1),

$$\Phi_i = a_1 + a_2 x_i \quad (2.4)$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2 x_j \quad (2.5)$$

Multiplicando la primera por (-1):

$$\begin{aligned} -\Phi_i &= -a_1 - a_2 x_i \\ +\Phi_j &= +a_1 + a_2 x_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

y sumando término a término:

$$a_2 \left[ x_j - x_i \right] = \Phi_j - \Phi_i \quad (2.7)$$

Despejando el valor de  $a_2$ :

$$a_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i} \quad (2.8)$$

De la segunda ecuación (2.6):

$$\Phi_j = a_1 + a_2 x_j \quad (2.9)$$

Despejando  $a_1$ :

$$a_1 = \Phi_j - a_2 x_j \quad (2.10)$$

Sustituyendo  $a_2$  obtenido en (2.8),

$$a_1 = \Phi_j - \left[ \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i} \right] x_j \quad (2.11)$$

ó bien,

$$a_1 = \Phi_j - \frac{\Phi_j x_j + \Phi_i x_j}{x_j - x_i} \quad (2.12)$$

que también se puede escribir:

$$a_1 = \Phi_j + \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} \quad (2.13)$$

Realizando operaciones:

$$a_1 = \frac{\Phi_j (x_j - x_i) + \Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} \quad (2.14)$$

$$a_1 = \frac{\Phi_j x_j - \Phi_j x_i + \Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} \quad (2.15)$$

Por tanto,

$$a_1 = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} \quad (2.16)$$

Sustituyendo el valor de  $a_2$  obtenido en (2.8) y el de  $a_1$  obtenido en (2.16), en la función de interpolación,

$$\phi = a_1 + a_2 x \quad (2.17)$$

Se tiene,

$$\phi = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i}{x_j - x_i} + \left[ \frac{\Phi_j - \Phi_i}{x_j - x_i} \right] x \quad (2.18)$$

De la figura 2.1,

$$L = x_j - x_i \quad (2.19)$$

La ecuación (2.18) se puede escribir,

$$\phi = \frac{\Phi_i x_j - \Phi_j x_i + \Phi_j x - \Phi_i x}{L} \quad (2.20)$$

Organizando términos,

$$\phi = \Phi_i \left[ \frac{x_j - x}{L} \right] + \Phi_j \left[ \frac{x - x_i}{L} \right] \quad (2.21)$$

Llamando:

$$N_i = \frac{x_j - x}{L} \quad (2.22)$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{L} \quad (2.23)$$

donde  $N_i, N_j$  son llamadas funciones de forma o de interpolación. Sustituyendo en (2.21),

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j \quad (2.24)$$

que se puede escribir como:

$$\phi = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Matricialmente:

$$\phi = [N] \{\Phi\} \quad (2.26)$$

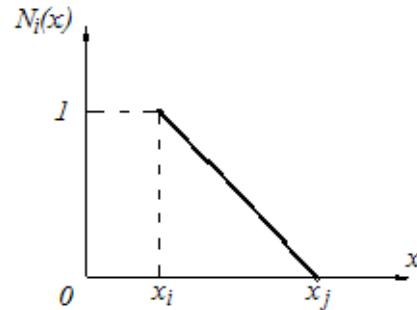
donde  $[N]$  es la matriz que contiene a las funciones de forma y  $\{\Phi\}$  es el vector que contiene los valores nodales de la función y  $\phi$  es la función que interpola los valores nodales.

[Referencia] 'Análisis Avanzado de Estructuras', apuntes del Ing. Hugo Hernández Barrios.

## 2.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE FORMA

1. Cada función de forma tiene un valor de uno en su propio nodo y es cero en cualquier otro nodo (Fig. 2.2).
2. La suma de las funciones de forma en cualquier punto del dominio es uno.
3. Las funciones de forma son siempre polinomios del mismo orden que la ecuación de interpolación original.
4. La derivada de las funciones de forma respecto a  $x$  es cero (en este caso).

$$N_i = \frac{x_j - x}{L}$$



$$N_j = \frac{x - x_i}{L}$$

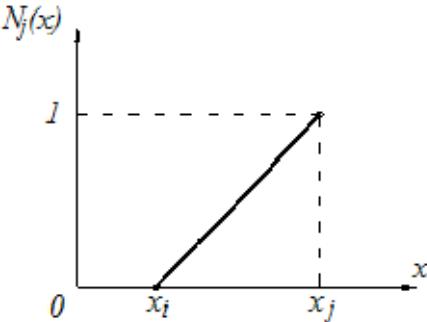


Fig. 2.2 Gráfica de las funciones de forma.

**EJEMPLO 2.1**

Se usa un elemento unidimensional para aproximar la distribución de temperatura en una estructura. La solución indica que las temperaturas nodales son:

$$\Phi_i = 100^\circ C \quad (2.27)$$

$$\Phi_j = 85^\circ C \quad (2.28)$$

Determinar la temperatura en un punto a 4 cm del origen y la temperatura gradiente en el elemento. Los nodos  $i$  y  $j$  están localizados a 2.5 y 7 cm del origen, respectivamente (Fig. 2.3).

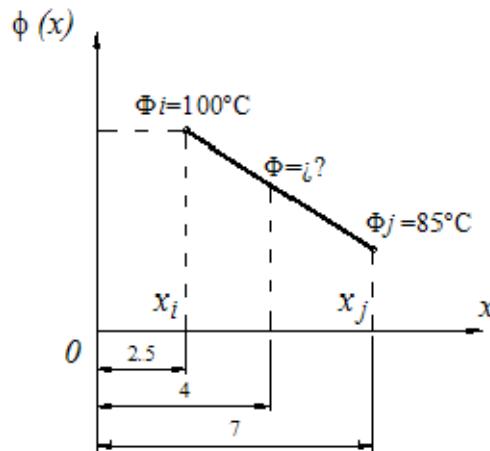


Fig. 2.3 Distribución de temperatura del ejemplo 2.1.

Se tiene:

$$x_i = 2.5 \text{ cm}, \quad x_j = 7 \text{ cm} \quad y \quad x = 4 \text{ cm}$$

Por lo que:

$$L = 7 - 2.5 = 4.5 \text{ cm}$$

$$\Phi_i = 100^\circ C$$

$$\Phi_j = 85^\circ C$$

Sustituyendo en la ecuación (2.21):

$$\phi = \left[ \frac{x_j - x}{L} \right] \Phi_i + \left[ \frac{x - x_i}{L} \right] \Phi_j \quad (2.29)$$

$$\phi = \left[ \frac{7 - 4}{4.5} \right] 100 + \left[ \frac{4 - 2.5}{4.5} \right] 85 \quad (2.30)$$

$$\phi = 95^\circ C \quad (2.31)$$

El gradiente de temperatura es:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} = \left| \frac{85 - 100}{4.5} \right| = -3.33^\circ \frac{C}{cm} \quad (2.32)$$

## 2.3 SISTEMAS COORDENADOS

Las soluciones por Elemento Finito requieren de la evaluación de integrales. Algunas de ellas son fáciles de evaluar pero en algunos casos son muy difíciles. Para algunas integrales es imposible su solución analítica tal que, para realizar su evaluación es necesario usar alguna técnica numérica.

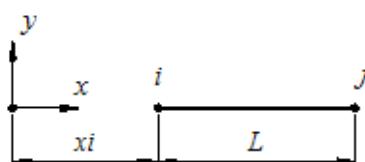
Las dificultades asociadas en la evaluación de integrales puede disminuir cambiando las variables de integración, esto involucra escribir la integral en un nuevo sistema coordenado.

Los sistemas coordenados se clasifican en:

- a) Locales  $s, q$
- b) Naturales  $\zeta, \eta$
- c) De área L

## 2.4 SISTEMAS DE COORDENADAS LOCALES $s, q$

Las funciones de forma lineales obtenidas previamente en la sección 2.1, están referidas a un sistema de coordenadas ubicado a la izquierda del nodo  $i$  (Fig. 2.4).



$$N_i = \frac{x_j - x}{L}$$

$$N_j = \frac{x - x_i}{L}$$

Fig. 2.4 Funciones de forma del elemento línea, referidas a la izquierda del nodo  $i$ .

La desventaja de estas funciones de forma se presenta cuando se tratan de evaluar integrales que involucran productos de las funciones de forma, tal como:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x) \cdot N_j(x) dx \quad (2.33)$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx \quad (2.34)$$

La integración de estas ecuaciones se facilita desarrollando nuevas funciones de forma referidas a un sistema coordenado relativo, cuyo origen está localizado en el elemento, este sistema coordenado es conocido como Sistema Local. Los sistemas locales más comunes para un elemento unidimensional son los que tienen el origen del sistema coordenado en el nodo  $i$ ; y el que tiene el origen del sistema coordenado en el centro del elemento.

Las funciones de forma para un sistema coordenado local ubicado en el nodo  $i$  (Fig. 2.5), se obtiene reemplazando en las funciones de forma (2.22) y (2.23),

$$x = x_i + S \quad (2.35)$$

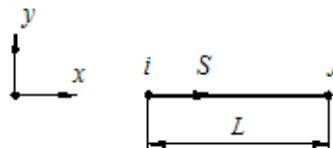


Fig. 2.5 Sistema coordenado local ubicado en el nodo  $i$ .

Así se tiene,

$$N_i(S) = \frac{x_j - x}{L} = \frac{x_j - x_i - S}{L} = \frac{x_j - x_i}{L} - \frac{S}{L} = 1 - \frac{S}{L} \quad (2.36)$$

$$N_j(S) = \frac{x - x_i}{L} = \frac{x_i + S - x_i}{L} = \frac{S}{L} \quad (2.37)$$

Las funciones de forma obtenidas con respecto al sistema local,  $S$ , son:

$$N_i(S) = 1 - \frac{S}{L} \quad (2.38)$$

$$N_j(S) = \frac{S}{L} \quad (2.39)$$

Que se pueden expresar en función de  $x$ ,

$$N_i(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.40)$$

$$N_j(x) = \frac{x}{L} \quad (2.41)$$

Estas funciones de forma son iguales en su propio nodo y son cero en el otro. Su suma es uno en todo punto.

### EJEMPLO 2.2

Evaluar la integral:  $\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx$

Para obtener la solución se cambian los límites de integración, lo que significa cambiar el origen de referencia de la función de forma  $N_i(x) \rightarrow N_i(S)$ ,

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(S) ds = \int_0^L \left[ 1 - \frac{S}{L} \right]^2 ds \quad (2.42)$$

Evaluando la integral:

$$= \int_0^L \left[ 1 - \frac{2S}{L} + \left( \frac{S}{L} \right)^2 \right] ds = S - \frac{S^2}{L} + \frac{S^3}{3L^2} \Big|_0^L \quad (2.43)$$

$$= L - \frac{L^2}{L} + \frac{L^3}{3L^2} = L - L + \frac{L}{3} = \frac{L}{3} \quad (2.44)$$

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \frac{L}{3} \quad (2.45)$$

Las funciones de forma referidas a un sistema coordenado local ubicado en el centro del elemento (Fig. 2.6), se obtiene reemplazando en las funciones de forma (2.22) y (2.23),

$$x = x_i + \left( \frac{L}{2} \right) + q \quad (2.46)$$

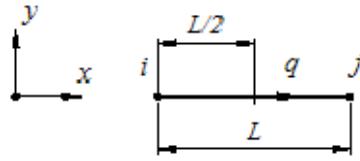


Fig. 2.6 Sistema coordenado local ubicado en el centro del elemento.

$$\begin{aligned}
 N_i(q) &= \frac{x_j - x}{L} = \frac{x_j - x_i - \left(\frac{L}{2}\right) - q}{L} = \frac{x_j - x_i}{L} - \frac{\frac{L}{2}}{L} - \frac{q}{L} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{q}{L} = \frac{1}{2} - \frac{q}{L}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$N_j(q) = \frac{x - x_i}{L} = \frac{x_i + \left(\frac{L}{2}\right) + q - x_i}{L} = \frac{1}{2} + \frac{q}{L} \tag{2.48}$$

Así, las funciones de forma, con respecto al sistema local,  $q$ , son:

$$N_i(q) = \frac{1}{2} - \frac{q}{L} \tag{2.49}$$

$$N_j(q) = \frac{1}{2} + \frac{q}{L} \tag{2.50}$$

Que se pueden expresar en función de  $x$ ,

$$N_i(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \tag{2.51}$$

$$N_j(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \tag{2.52}$$

donde la variable dependiente varía de  $-L/2$  a  $L/2$ .

**EJEMPLO 2.3**

Evaluar la integral:  $\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx$

Para obtener la solución se cambian los límites de integración, lo que significa cambiar el origen de referencia de la función de forma  $N_i(x) \rightarrow N_i(q)$ ,

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_i^2(q) dq = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{1}{2} - \frac{q}{L} \right]^2 dq \\
 &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \frac{1}{4} - \frac{q}{L} + \frac{q^2}{L^2} \right] dq = \frac{1}{4} q - \frac{q^2}{2L} + \frac{q^3}{3L^2} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \right] - \frac{1}{2L} \left[ \frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{4} \right] + \frac{1}{3L^2} \left[ \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right] \\
 &= \frac{L}{4} + \frac{L^3}{12L^2} = \frac{L}{4} + \frac{L}{12} = \frac{3L + L}{12} = \frac{4L}{12} = \frac{L}{3}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Resumiendo, las funciones de forma del elemento línea son:

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{L} \tag{2.54}$$

$$N_j(x) = \frac{x - x_i}{L} \tag{2.55}$$

$$\text{Sistema Local "s"} \quad N_i(x) = 1 - \frac{x}{L} \tag{2.56}$$

$$N_j(x) = \frac{x}{L} \tag{2.57}$$

$$\text{Sistema Local "q"} \quad N_i(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{L} \tag{2.58}$$

$$N_j(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{L} \tag{2.59}$$

Las integrales de los ejemplos 2.2 y 2.3, serán difícil de evaluar si:

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx &= \int_{x_i}^{x_j} \left[ \frac{x_j - x}{L} \right]^2 dx = \frac{1}{L^2} \int_{x_i}^{x_j} [x_j - x]^2 dx \\
 &= \frac{1}{L^2} \int_{x_i}^{x_j} [x_j^2 - 2x_j x + x^2] dx = \frac{1}{L^2} \left[ x_j^2 x - \frac{2x_j x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{x_i}^{x_j} \\
 &= \frac{1}{L^2} \left[ x_j^2 [x_j - x_i] - x_j [x_j^2 - x_i^2] + \frac{1}{3} [x_j^3 - x_i^3] \right]
 \end{aligned}$$

## 2.5 SISTEMAS COORDENADOS NATURALES

Un sistema coordenado local en  $S$  y  $q$  se puede convertir en un sistema coordenado natural. Un sistema coordenado natural, es un sistema local que permite la especificación de un punto por un número adimensional cuya magnitud absoluta nunca excede la unidad.

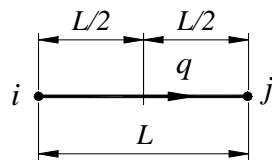


Fig. 2.7 Sistema coordenado local.

Para el sistema con coordenada  $q$  que varía de  $-L/2$  a  $L/2$  (Fig. 2.7), realizando el siguiente cambio de variable,

$$\frac{q}{L} = \frac{2q}{L} = \zeta \quad (2.60)$$

Se logra que los límites de integración para la nueva coordenada  $\zeta$  sean de -1 a +1 (Fig. 2.8).

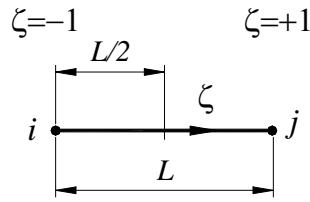


Fig. 2.8 Sistema coordenado natural.

Por lo que la coordenada independiente es:

$$q = \frac{\zeta L}{2} \quad (2.61)$$

Reemplazando en la función de forma (2.49):

$$N_i(q) = \frac{1}{2} - \frac{q}{L} \quad (2.62)$$

$$N_i(\zeta) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{\zeta L}{2}}{L} = \frac{1}{2} - \frac{\zeta L}{2L} = \frac{1}{2} - \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad (2.63)$$

Reemplazando en la función de forma (2.50):

$$N_i(q) = \frac{1}{2} + \frac{q}{L} \quad (2.64)$$

$$N_i(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{q}{L} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{\zeta L}{2}}{L} = \frac{1}{2} + \frac{\zeta L}{2L} = \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad (2.65)$$

Por lo tanto, las funciones de forma en función de coordenadas naturales son:

$$N_i(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad (2.66)$$

$$N_j(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad (2.67)$$

Para realizar estas integrales es necesario efectuar un cambio en los límites de integración, de la siguiente manera:

$$\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r(q) dq = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} q(\zeta) \frac{d}{d\zeta} \left[ \frac{\zeta L}{2} \right] d\zeta = \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} g(\zeta) d\zeta \quad (2.68)$$

donde  $g(\zeta)$  es  $r(q)$  escrita en términos de  $\zeta$ . La ventaja de hacer el cambio de variables es que los límites de integración son ahora de -1 a +1.

Las matrices individuales de los elementos en ocasiones se integran en forma numérica usando algoritmos como el de Gauss-Legendre el cual integra en puntos con coeficientes definidos en el intervalo -1 a +1.

Para un sistema de coordenadas  $S$  que varía de 0 a  $L$ , se pueden cambiar los límites por medio de relaciones de longitud (Fig. 2.9).

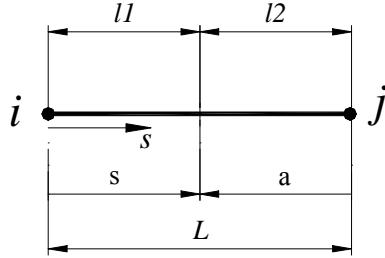


Fig. 2.9 Sistema coordenado local.

Si  $S$  es la distancia del nodo  $i$  a un punto cualquiera del elemento, entonces las relaciones  $l_1$  y  $l_2$  están definidas por:

$$l_1 = \frac{L - S}{L} = \frac{a}{L} \quad (2.69)$$

$$l_2 = \frac{S}{L} \quad (2.70)$$

El par de coordenadas  $l_1$  y  $l_2$  están relacionadas con la ecuación:

$$l_1 + l_2 = 1 \quad (2.71)$$

Así:

$$l_1 = \frac{L - S}{L} = 1 - \frac{S}{L} \quad (2.72)$$

$$l_2 = \frac{S}{L} \quad (2.73)$$

que son idénticas a las funciones de forma anteriormente definidas (2.38) y (2.39):

$$N_i(S) = 1 - \frac{S}{L} = l_1 \quad (2.74)$$

$$N_j(S) = \frac{S}{L} = l_2 \quad (2.75)$$

La utilidad de este sistema coordenado está asociada con la evaluación de integrales del tipo:

$$\int_0^L N_i^a(S) N_j^b(S) ds \quad (2.76)$$

la cual involucra productos de funciones de forma. De la regla de cambio de variable y las relaciones:

$$N_i(S) = l_1 \quad (2.77)$$

$$N_j(S) = l_2 \quad (2.78)$$

$$S = Ll_2 \quad (2.79)$$

obtenida de (2.73):

$$l_2 = \frac{S}{L} \quad (2.80)$$

Diferenciando (2.79),

$$dS = dl_2 L \quad (2.81)$$

$$L = \frac{dS}{dl_2} \quad (2.82)$$

de (2.71):

$$l_1 + l_2 = 1 \quad (2.83)$$

Despejando  $l_1$ ,

$$l_1 = 1 - l_2 \quad (2.84)$$

Sustituyendo en la integral (2.76), tenemos:

$$\int_0^L N_i^a(S) N_j^b(S) ds = \int_0^1 l_1^a l_2^b L dl_2 \quad (2.85)$$

$$= L \int_0^1 (1 - l_2)^a l_2^b dl_2 \quad (2.86)$$

Usando la fórmula de integración:

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{W-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(W)}{\Gamma(z+W)} \quad (2.87)$$

Donde,

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (2.88)$$

Según Abramowitz y Stegun (1964), tenemos:

$$L \int_0^1 l_1^a l_2^b dl_2 = L \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1+1)} \quad (2.89)$$

$$L \int_0^1 l_1^a l_2^b dl_2 = L \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \quad (2.90)$$

Esta fórmula es importante para evaluar integrales que involucran longitudes de elementos y productos de sus potencias.

#### EJEMPLO 2.4

Evaluar la integral:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx \quad (2.91)$$

Cambiando las variables de la integral,

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(S) ds \quad (2.92)$$

Como:

$$N_i(S) = l_1 \quad (2.93)$$

$$N_j(S) = l_2 \quad (2.94)$$

entonces:

$$\int_0^L N_i^2(S) ds = L \int_0^1 l_1^2 l_2^0 dl_2 \quad (2.95)$$

donde  $a = 2$  y  $b = 0$ . Empleando la fórmula de integración (2.90),

$$L \int_0^1 l_1^2 l_2^0 dl_2 = L \frac{\Gamma(2+1)\Gamma(0+1)}{\Gamma(2+0+1+1)} = L \frac{2!0!}{(2+0+1)!} \quad (2.96)$$

$$= L \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{L}{3} \quad (2.97)$$

#### EJEMPLO 2.5

Evaluar la integral:

$$\int_0^L N_i^3(S) N_j^2(S) ds \quad (2.98)$$

Cambiando las variables de la integral,

$$\int_0^L N_i^3(S) N_j^2(S) ds = L \int_0^1 l_1^a l_2^b L dl_2 = L \frac{3!2!}{(3+2+1)!} \quad (2.99)$$

$$= L \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{L}{60} \quad (2.100)$$

## 2.6 RESUMEN DE SISTEMAS COORDENADOS Y LÍMITES DE INTEGRACIÓN PARA UN ELEMENTO UNIDIMENSIONAL

Tipo de sistema	Coordinada variable	Función de forma	Límites de integración
Global	$x$	$N_i = \frac{x_j - x}{L}$ $N_j = \frac{x - x_i}{L}$	$x_i ; x_j$
Local	$S$	$N_i = 1 - \frac{S}{L}$ $N_j = \frac{S}{L}$	$0 ; L$
Local	$q$	$N_i = \frac{1}{2} - \frac{q}{L}$ $N_j = \frac{1}{2} + \frac{q}{L}$	$-\frac{L}{2} ; +\frac{L}{2}$
Natural	$\zeta$	$N_i = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$ $N_j = \frac{1}{2}(1 + \zeta)$	$-1 ; +1$
Natural	$l_2$	$N_i = l_1$ $N_j = l_2$	$0 ; 1$

## 2.7 INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN UNA DIMENSIÓN

La evaluación numérica de la integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.101)$$

es conocida como cuadratura. Las cuadraturas más comunes en el MEF son:

a) Newton-Cotes

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.102)$$

b) Gauss-Legendre

$$I = \int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta \quad (2.103)$$

### 2.7.1 CUADRATURA DE NEWTON-COTES

Es un método numérico de integración exacta para un polinomio de grado “ $n$ ” con una variable, donde  $n+1$  es el número de funciones a evaluarse. El método se define como:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n (Cn_i) f(x_i) \quad (2.104)$$

Las abscisas  $x_i$  son los puntos en los cuales la función es evaluada y se suponen igualmente espaciados (Fig. 2.10),  $Cn_i$  son los pesos ó funciones de peso. Supongamos que  $f(x)$  es evaluada en 4 distintos puntos:  $x_0, x_1, x_2$  y  $x_3$ ; espaciados a intervalos iguales,  $h$ .

$$g(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (2.105)$$

La función  $g(x)$  se puede obtener por interpolación Lagrangiana de forma tal que,

$$g(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x) + f(x_2) L_2(x) + f(x_3) L_3(x) \quad (2.106)$$

donde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \quad (2.107)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \quad (2.108)$$

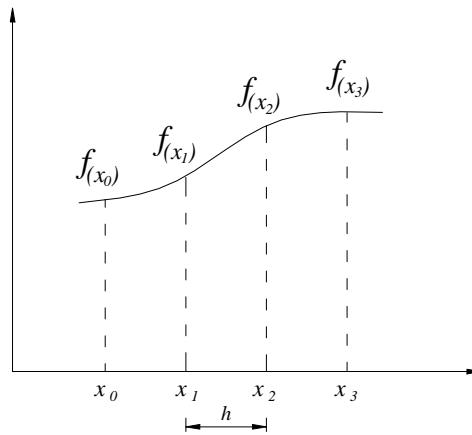


Fig. 2.10 Función de interpolación.

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad (2.109)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (2.110)$$

La integración numérica puede realizarse usando interpolación polinómica  $g(x)$  para cuatro puntos (Fig. 2.11).

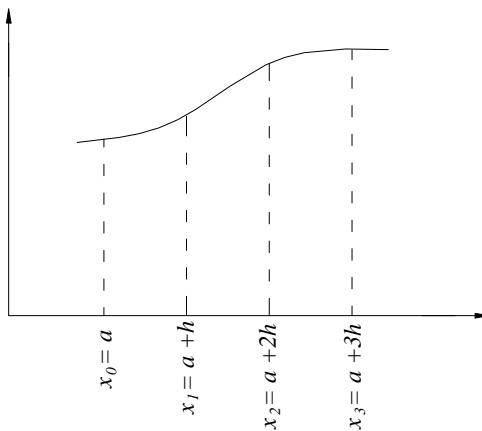


Fig. 2.11 Interpolación polinómica.

Considerando el espaciamiento entre puntos,

$$h = \frac{(b-a)}{3} \quad (2.111)$$

Sustituyendo en (2.104),

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^3 \left[ \int_a^b L_i(x) dx \right] f(x_i) + E_3 \quad (2.112)$$

$$= \sum_{i=0}^3 C_{3i} f(x_i) + \text{error} \quad (2.113)$$

donde:

$$C_{3i} = \int_a^b L_i(x) dx \quad \text{con } i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.114)$$

$$= C_{30} f(x_0) + C_{31} f(x_1) + C_{32} f(x_2) + C_{33} f(x_3) \quad (2.115)$$

La fórmula general para las funciones de peso es:

$$C_{ni} = h A W_i \quad (2.116)$$

Los valores de  $A$  y de  $W_i$  se obtienen de la Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de Newton

$n$	$A$	$W_0$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	Error
1	$\frac{1}{2}$	1	1				-1/2
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			-1/90
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		-3/80
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	-8/945

### EJEMPLO 2.6

Evaluar numéricamente la integral:

$$I = \int_1^4 x^2 dx \quad (2.117)$$

cuya solución exacta es 21 unidades cuadradas.

- a) Considerando  $n = 1$
- b) Considerando  $n = 2$
- c) Considerando  $n = 3$

1. Considerando  $n = 1$  (Fig. 2.12).

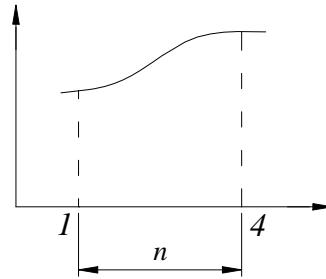


Fig. 2.12 Interpolación para  $n = 1$ .

Cálculo del espaciamiento,

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (2.118)$$

$$h = \frac{4-1}{1} = 3 \quad (2.119)$$

De la Tabla 2.1 se obtiene:

$$A = \frac{1}{2} \quad (2.120)$$

Pesos:

$$C_0 = hAW_0 = 3\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 1.5 \quad (2.121)$$

$$C_1 = hAW_1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)(1) = 1.5 \quad (2.122)$$

Sustituyendo en (2.117),

$$I = C_0 f(1) + C_1 f(4) = 1.5(1)^2 + 1.5(4)^2 = 25.5 \neq 21 \quad (2.123)$$

Esta es la regla trapezoidal la cual es válida solo para funciones lineales.

2. Considerando  $n = 2$  (Fig. 2.13).

Espaciamiento entre puntos:

$$h = \frac{4-1}{2} = 1.5 \quad (2.124)$$

De la Tabla 2.1 se obtiene:

$$A = \frac{1}{3} \quad (2.125)$$

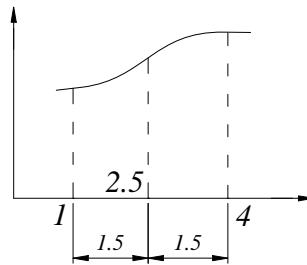


Fig. 2.13 Interpolación para  $n = 2$ .

Funciones de peso:

$$C_0 = hAW_0 = (1.5) \left( \frac{1}{3} \right) (1) = 0.50 \quad (2.126)$$

$$C_1 = hAW_1 = (1.5) \left( \frac{1}{3} \right) (4) = 2.0 \quad (2.127)$$

$$C_2 = hAW_2 = (1.5) \left( \frac{1}{3} \right) (1) = 0.50 \quad (2.128)$$

Sustituyendo en (2.117),

$$I = C_0 f(1) + C_1 f(2.5) + C_2 f(4) \quad (2.129)$$

$$I = 0.5(1)^2 + 2(2.5)^2 + 0.5(4)^2 = 21 = 21 \quad (2.130)$$

Esta es la regla de Simpson 1/3, la cual es exacta para funciones cuadráticas y lineales.

3. Considerando  $n = 3$  (Fig. 2.14).

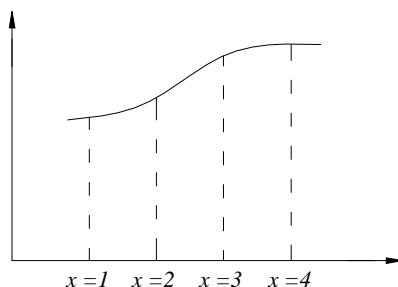


Fig. 2.14 Interpolación para  $n = 3$ .

Espaciamiento entre puntos:

$$h = \frac{4-1}{3} = 1.0 \quad (2.131)$$

De la Tabla 2.1 se obtiene:

$$A = \frac{3}{8} \quad (2.132)$$

Las Funciones de peso son:  $W_0 = 1$ ,  $W_1 = 3$ ,  $W_2 = 3$ ,  $W_3 = 1$ . Sustituyendo en:  $C_n = hAW_n$ .

$$C_0 = (1) \left( \frac{3}{8} \right) (1) = \frac{3}{8} \quad (2.133)$$

$$C_1 = (1) \left( \frac{3}{8} \right) (3) = \frac{9}{8} \quad (2.134)$$

$$C_2 = (1) \left( \frac{3}{8} \right) (3) = \frac{9}{8} \quad (2.135)$$

$$C_3 = (1) \left( \frac{3}{8} \right) (1) = \frac{3}{8} \quad (2.136)$$

Sustituyendo en (2.117),

$$I = C_0 f(1) + C_1 f(2) + C_2 f(3) + C_3 f(4) \quad (2.137)$$

Ó bien:

$$I = \frac{3}{8} (1)^2 + \frac{9}{8} (2)^2 + \frac{9}{8} (3)^2 + \frac{3}{8} (4)^2 = 21 = 21 \quad (2.138)$$

Esta es la regla de Simpson 3/8, la cual es válida para funciones cúbicas o de orden inferior.

### 2.7.2 CUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Este es el procedimiento más usado y popular en el MEF. Supongamos una función  $f(\zeta)$  para la cual se desea calcular la integral en el intervalo  $(-1, +1)$ , es decir:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\zeta \quad (2.139)$$

La regla de integración o cuadratura de Gauss-Legendre expresa el valor de dicha integral como una suma de productos de los valores del integrando, en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos coeficientes (pesos) determinados. Es decir, para una cuadratura de orden “ $p$ ” se tiene:

$$I_p = \sum_{i=1}^p f(\zeta_i) W_i \quad (2.140)$$

Donde  $W_i$  es el peso correspondiente al punto de integración  $i$  y  $p$  es el número de dichos puntos. La cuadratura de Gauss-Legendre de orden  $p$  integra exactamente un polinomio de grado  $(2p-1)$  ó menor.

En la Tabla 2.2 se muestran las coordenadas  $\zeta_i$  y los pesos  $W_i$  para las seis primeras cuadraturas de Gauss-Legendre.

Obsérvese que los puntos de integración están todos expresados en el espacio normalizado  $-1 \leq \zeta \leq +1$ , el cual resulta de gran utilidad para el cálculo de matrices de elementos referidos a coordenadas naturales.

La popularidad de la cuadratura de Gauss-Legendre se debe a que utiliza un mínimo número de puntos de integración para conseguir un error determinado en el cálculo, por consiguiente minimiza el número de veces que hay que calcular el valor de la función a integrar.

Tabla 2.2 Coeficientes de peso auxiliares para el cálculo de cuadratura de Gauss

$p$	$\pm \zeta_i$ puntos de colocación	$W_i$
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1, 1
3	0 $\pm \sqrt{0.60}$	9/8 5/9, 5/9
4	$\pm 0.33998$ 10435 84850 $\pm 0.86113$ 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
5	0 $\pm 0.53846$ 93101 05683 $\pm 0.90617$ 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189
6	$\pm 0.23861$ 91860 83197 $\pm 0.66120$ 93864 66265 $\pm 0.93246$ 95142 03152	0.46791 39345 72691 0.36076 15730 48139 0.17132 44923 79170

**EJEMPLO 2.7**

Calcular la integral:  $I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx$ , considerando  $p = 3$ , y donde  $f(x)$ , es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) dx = W_1 f(\zeta_1) + W_2 f(\zeta_2) + W_3 f(\zeta_3) \quad (2.141)$$

De la Tabla 2.2, para  $p = 3$ ,  $W_1 = \frac{9}{8}$ ,  $W_2 = \frac{5}{9}$ ,  $W_3 = \frac{5}{9}$

$$I = \frac{9}{8} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{0.60}) + \frac{5}{9} f(-\sqrt{0.60}) \quad (2.142)$$

i) Sí  $f(x) = 1$

$$I = \frac{9}{8} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = 2.23 \quad \text{exacta} \quad (2.143)$$

ii) Sí  $f(x) = x$

$$I = \frac{5}{9}(\sqrt{0.60}) + \frac{5}{9}(-\sqrt{0.60}) = 0 \quad \text{exacta} \quad (2.144)$$

iii) Sí  $f(x) = x^2$

$$I = \frac{5}{9}(0.60) + \frac{5}{9}(0.60) = \frac{2}{3} \quad \text{exacta} \quad (2.145)$$

iv) Sí  $f(x) = x^3$

$$I = \frac{5}{9}(0.60)^{3/2} + \frac{5}{9}(-0.60)^{3/2} = 0 \quad \text{exacta} \quad (2.146)$$

vi) Sí  $f(x) = x^4$

$$I = \frac{5}{9}(0.60)^2 + \frac{5}{9}(-0.60)^2 = \frac{2}{5} \quad \text{exacta} \quad (2.147)$$

vi) Sí  $f(x) = x^5$

$$I = \frac{5}{9}(0.60)^{5/2} + \frac{5}{9}(-0.60)^{5/2} = 0 \quad \text{exacta} \quad (2.148)$$

vii) Sí  $f(x) = x^6$

$$I = \frac{5}{9}(0.60)^3 + \frac{5}{9}(-0.60)^3 = 0 \quad \text{exacta} \quad (2.149)$$

## 2.8 INTEGRACIÓN NUMÉRICA EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En ocasiones es necesario calcular:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.150)$$

donde  $\zeta$  y  $\eta$  pueden ser coordenadas cartesianas ó curvilíneas. La integral (2.150) se puede expresar,

$$I = \int_{-1}^{+1} \sum_{j=1}^n H_j f(\zeta_j, \eta) d\eta = \int_{-1}^{+1} g(\eta) d\eta \quad (2.151)$$

$$I = \sum_{i=1}^n H_i g(\eta_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\zeta_j, \eta_i) \quad (2.152)$$

Para el caso tridimensional:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta, \delta) d\zeta d\eta d\delta \quad (2.153)$$

que se puede expresar,

$$I = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n H_i H_j H_k f(\zeta_k, \eta_j, \xi_i) \quad (2.154)$$

En muchos casos no hay ventaja en usar diferentes puntos de integración, si no que se supone que  $l = m = n$ . Si la función es integrada con  $l = m = n = 3$  la suma equivale a  $3 \times 3 \times 3$  puntos, la cual es exacta para polinomios de quinto orden en cada dirección.

Alternativamente, la integral se puede escribir:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta, \xi) d\zeta, d\eta, d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\zeta_i, \eta_i, \xi_i) \quad (2.155)$$

**EJEMPLO 2.8**

Considerando  $n = 2$ , desarrollar la formula de integración y evaluarla para el elemento cuadrilátero de la figura 2.15. Los valores de los pesos se obtienen de la Tabla 2.2.

$$I_{2x2} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (2.156)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta) d\zeta \right] d\eta \quad (2.157)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} [W_1 f(\zeta_1, \eta) + W_2 f(\zeta_2, \eta)] d\eta \quad (2.158)$$

Los pesos son constantes y pueden salir del operador integral,

$$\begin{aligned} I = & W_1 [W_1 f(\zeta_1, \eta_1) + W_2 f(\zeta_1, \eta_2)] \\ & + W_2 [W_1 f(\zeta_2, \eta_1) + W_2 f(\zeta_2, \eta_2)] \end{aligned} \quad (2.159)$$

Así, la integral queda definida por,

$$I_{2x2} = W_1^2 f(\zeta_1, \eta_1) + W_1 W_2 f(\zeta_1, \eta_2) + W_1 W_2 f(\zeta_2, \eta_1) + W_2^2 f(\zeta_2, \eta_2) \quad (2.160)$$

de la Tabla 2.2, tomando los pesos y los puntos de evaluación, para  $n=2$ :

$$W_1 = 1 \quad \zeta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.161a)$$

$$W_2 = 1 \quad \zeta_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \eta_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.161b)$$

Es decir, la integral será evaluada en el elemento cuadrilátero de la figura 2.14, en los puntos  $\zeta_1, \eta_1$  y  $\zeta_2, \eta_2$ .

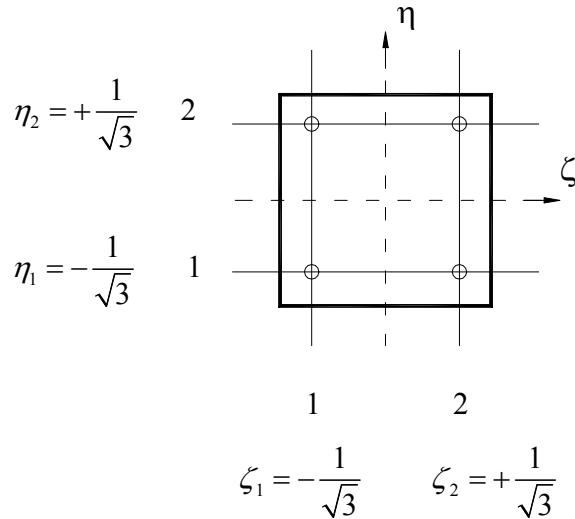


Fig. 2.15 Elemento cuadrilátero de integración.

Sustituyendo los valores de los pesos y los puntos de evaluación en:

$$I_{2x2} = W_1^2 f(\zeta_1, \eta_1) + W_1 W_2 f(\zeta_1, \eta_2) + W_1 W_2 f(\zeta_2, \eta_1) + W_2^2 f(\zeta_2, \eta_2) \quad (2.162)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
 I_{2x2} = & (1) \left[ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + (1)(1) \left[ \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( +\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + \\
 & (1)(1) \left[ \left( +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + (1) \left[ \left( +\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( +\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (2.163)$$

Realizando operaciones,

$$I = -0.244016 + 0.910684 - 0.244016 + 0.910684 \quad (2.164)$$

$$I = 1.333 \quad (2.165)$$

el valor exacto es

$$I = \frac{4}{3} \quad (2.166)$$

**EJEMPLO 2.9**

Considerando  $n = 3$  desarrollar la formula de integración:

$$I_{3x3} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[ \int_{-1}^{+1} f(\zeta, \eta) d\zeta \right] d\eta \quad (2.167)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[ W_1 f(\zeta_1, \eta) + W_2 f(\zeta_2, \eta) + W_3 f(\zeta_3, \eta) \right] d\eta \quad (2.168)$$

$$\begin{aligned} &= W_1 \left[ W_1 f(\zeta_1, \eta_1) + W_2 f(\zeta_1, \eta_2) + W_3 f(\zeta_1, \eta_3) \right] \\ &+ W_2 \left[ W_1 f(\zeta_2, \eta_1) + W_2 f(\zeta_2, \eta_2) + W_3 f(\zeta_2, \eta_3) \right] \\ &+ W_3 \left[ W_1 f(\zeta_3, \eta_1) + W_2 f(\zeta_3, \eta_2) + W_3 f(\zeta_3, \eta_3) \right] \end{aligned} \quad (2.169)$$

## CAPÍTULO III

### ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES Y BIDIMENSIONALES

#### 3.1 ELEMENTO FINITO BARRA

Este elemento tiene sólo deformaciones axiales.

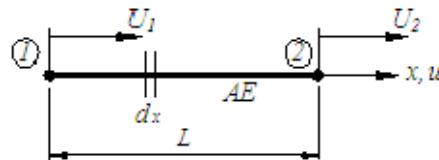


Fig. 3.1 Deformaciones axiales.

Considerando que  $A$  es el área de cortante,  $E$  el módulo de elasticidad del material y  $u_i$  los desplazamientos del nodo “i” en la dirección x. Tomando un elemento diferencial:

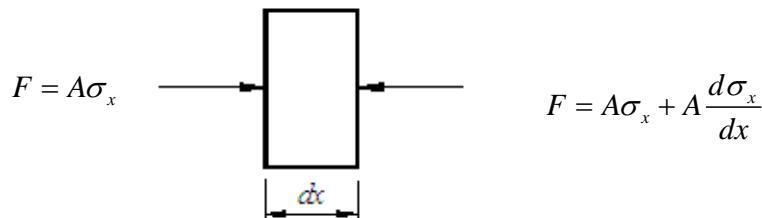


Fig. 3.2 Elemento diferencial.

donde  $\sigma_x$  es el esfuerzo normal en la dirección x. Del equilibrio,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ -A\sigma_x + A\sigma_x + A \frac{d\sigma_x}{dx} &= 0 \\ A \frac{d\sigma_x}{dx} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

De la ley de Hooke

$$\sigma_x = E \epsilon_x \tag{3.2}$$

donde la deformación unitaria en la dirección x, es:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{3.3}$$

Sustituyendo en (3.2),

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx} \tag{3.4}$$

y sustituyendo en (3.1),

$$AE \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (3.5)$$

Que es la ecuación diferencial de una barra sometida a esfuerzo axial.

La ecuación diferencial se resolverá por el Método de Residuos Pesados, particularmente por medio del método de Galerkin.

1. Se supone una aproximación a la solución:

$$u^* = N_1 \Phi_1 + N_2 \Phi_2 \quad (3.6)$$

donde  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son los valores nodales. La ecuación (3.6) también se puede escribir,

$$u^* = N_1 u_1 + N_2 u_2 = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (3.7)$$

donde las funciones de interpolación o de forma, referidas a un sistema coordenado local, son:

$$N_1 = \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] \quad (3.8)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.9)$$

Sustituyendo en la aproximación de la solución (3.7),

$$u^* = \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] u_1 + \left[ \frac{x}{L} \right] u_2 \quad (3.10)$$

2. Sustituimos en la ecuación diferencial (3.5),

$$AE \frac{d^2u^*}{dx^2} = R \quad (3.11)$$

3. Se pesa el error  $\int_{\Omega} RW_i d\Omega = 0$

$$\int_0^L \left[ EA \frac{d^2u^*}{dx^2} \right] W_i dx = 0 \quad (3.12)$$

4. Por el método de Galerkin:

$$W_i = N_i \quad (3.13)$$

los pesos son las funciones de forma, que sustituyendo en (3.12),

$$EA \int_0^L \left[ \frac{d^2u^*}{dx^2} \right] N_i dx = 0 \quad (3.14)$$

De la integración por partes:

$$d[A \cdot B] = AdB + BdA$$

Despejando:  $BdA = d[A \cdot B] - AdB$

$$\text{Integrando: } \int BdA = A \cdot B - \int AdB \quad (3.15)$$

$$\text{con: } B = N_i dx \quad dB = \frac{dN_i}{dx} dx$$

$$dA = \frac{d^2u^*}{dx^2} \quad A = \frac{du^*}{dx}$$

Empleando la formula (3.15), para resolver (3.14),

$$EA \int_0^L \frac{d^2 u^*}{dx^2} N_i dx = EA \left[ \frac{du^*}{dx} N_i \Big|_0^L - \int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right] = 0 \quad (3.16)$$

en donde:

$$\begin{aligned} u &= N_i dx & du &= \frac{dN_i}{dx} dx \\ dv &= \frac{d^2 u^*}{dx^2} dx & v &= \frac{du^*}{dx} \end{aligned}$$

De (3.16),

$$EA \left[ \frac{du^*}{dx} N_i \Big|_0^L - \int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \right] = 0 \quad (3.17)$$

Despejando la integral definida,

$$EA \int_0^L \frac{du^*}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx = EA \frac{du^*}{dx} N_i \Big|_0^L \quad (3.18)$$

Como:  $u^* = N_1 u_1 + N_2 u_2$  ; y  $\epsilon_x = \frac{du^*}{dx}$

Sustituyendo en (3.18),

$$EA \int_0^L \frac{d}{dx} [N_1 u_1 + N_2 u_2] \frac{dN_i}{dx} dx = EA [\epsilon_x] N_i \Big|_0^L \quad (3.19)$$

como  $\sigma_x = E \epsilon_x$ , tenemos:

$$EA \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \left[ \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \right] dx = A \sigma_x N_i \Big|_0^L \quad (3.20)$$

como:  $F = A \sigma_x$

matricialmente  $EA \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = FN_i \Big|_0^L$  (3.21)

como:  $i = 1, 2$

Para  $i = 1$ , en (3.21),

$$EA \int_0^L \frac{dN_1}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = FN_1 \Big|_0^L \quad (3.22)$$

Para  $i = 2$ , en (3.21),

$$EA \int_0^L \frac{dN_2}{dx} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = FN_2 \Big|_0^L \quad (3.23)$$

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) matricialmente se pueden escribir,

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = F \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \Big|_0^L \quad (3.24)$$

Reorganizando:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = F \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \Big|_0^L \quad (3.25)$$

Que tiene la forma:

$$\int_v^L [B]^T [D] [B] \{u\} dv = \{P\} \quad (3.26)$$

donde la matriz elemental de rigidez es:

$$[k^e] = \int_v^L [B]^T [D] [B] dv \quad (3.27)$$

De (3.26) se puede ver que,

$$[k^e] \{u\} = \{P\} \quad (3.28)$$

como las funciones de forma (3.8), (3.9):

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

sus derivadas,

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{L} \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{L}$$

sustituyendo en (3.25), se tiene:

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ +\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & +\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = F \begin{bmatrix} N_1(L) & -N_1(0) \\ N_2(L) & -N_2(0) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

realizando operaciones:

$$EA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = F \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

como  $L$  (longitud del elemento) es constante:

$$\frac{EA}{L^2} \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = F \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Como los desplazamientos son constantes en toda la longitud de la barra, y llamando:

$$F_1 = -F$$

$$F_2 = F$$

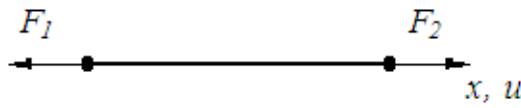


Fig. 3.3 Fuerzas en la barra.

La expresión (3.31) se puede escribir,

$$\frac{EA}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \int_0^L dx = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

ó bien, en coordenadas locales:

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Donde la matriz elemental de rigideces es,

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

[Referencia] 'Análisis Avanzado de Estructuras', apuntes del Ing. Hugo Hernández Barrios.

### EJEMPLO 3.1

Determinar los desplazamientos en los nodos, las deformaciones y los esfuerzos para los elementos del miembro mostrado en la figura. Considere el módulo de elasticidad, E, y el área, A, de la sección transversal de los elementos, como constantes.

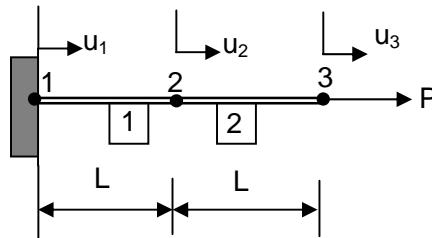


Fig. 3.4 Elementos y nodos de una viga en cantiliver.

Anteriormente se determinó que la matriz de rigidez elemental, para el elemento 1,

$$[k_1^e] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

para el elemento 2,

$$[k_2^e] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La matriz de rigidez total:

$$[k] = [k_1^e] + [k_2^e]$$

es decir:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

De la relación:

$$[F] = [k]\{u\}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de frontera son:

$u_1 = 0$  en el apoyo que está empotrado.

$F_3 = P$  en el cantilever.

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} P &= \frac{EA}{L} [-u_2 + u_3] \\ 0 &= 2u_2 - u_3 \end{aligned}$$

de donde:

$$u_3 = 2u_2$$

así:  $P = \frac{EA}{L} [-u_2 + 2u_2] = \frac{EA}{L} u_2;$

despejando los desplazamientos nodales:

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{PL}{EA} \\ u_3 &= 2 \frac{PL}{EA} \end{aligned}$$

para la fuerza:  $F_1 = -\frac{EA}{L} u_2 = -\frac{EA}{L} \frac{PL}{EA} = -P,$

$$F_1 = -P$$

## DEFORMACIONES ELEMENTALES:

Elemento 1:

$$\begin{aligned} [\epsilon^e] &= [B^e] \{u^e\} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{PL}{EA} \\ \frac{PL}{EA} \end{bmatrix} \\ [\epsilon^e] &= \frac{P}{EA} \end{aligned}$$

Elemento 2:

$$[\epsilon^e] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{PL}{EA} \\ 2\frac{PL}{EA} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon^e] = \frac{P}{EA}$$

ESFUERZOS ELEMENTALES:

Elemento 1:

$$[\sigma] = [D][\epsilon] = E \begin{bmatrix} \frac{P}{EA} \end{bmatrix} = \frac{P}{A}; \quad [\sigma] = \frac{P}{A}$$

Elemento 2:

$$[\sigma] = [D][\epsilon] = E \begin{bmatrix} \frac{P}{EA} \end{bmatrix} = \frac{P}{A}; \quad [\sigma] = \frac{P}{A}$$

### 3.1.1 MATRÍZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

La matriz de rigidez de un elemento barra en coordenadas locales es:

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

y:

$$[F] = [k]\{u\}$$

Cuando el elemento está inclinado un ángulo  $\alpha$ , es necesario calcular la matriz de rigidez en coordenadas globales.

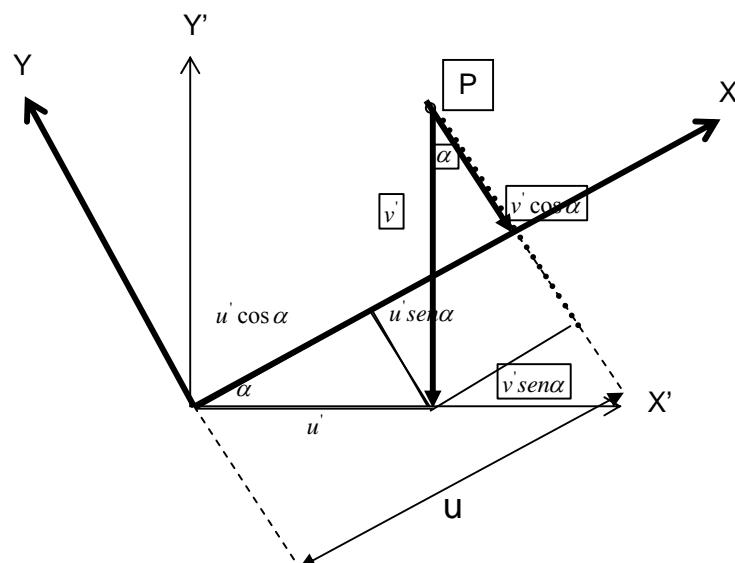


Fig. 3.5 Relación entre desplazamientos.

Sean  $x' - y'$  los ejes globales y  $x - y$  los ejes locales de la barra. Se puede ver que la relación entre los desplazamientos  $u$  y  $v$  y los desplazamientos globales  $u'$  y  $v'$  es:

$$u = u' \cos \alpha + v' \operatorname{sen} \alpha$$

$$v = v' \cos \alpha - u' \operatorname{sen} \alpha$$

que se pueden escribir:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Así, para los dos puntos nodales, dicha relación se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

ó bien:

$$[u^e] = [T] \{u'^e\} \quad (3.38)$$

En el caso de que únicamente sea necesario calcular los desplazamientos en la dirección del eje de la barra (desplazamientos  $u_1$  y  $u_2$  (ejes locales), la ecuación (3.37) se puede escribir,

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

donde  $u'_1$ ,  $v'_1$ ,  $u'_2$  y  $v'_2$  son los grados de libertad de la barra en coordenadas globales.

Para el cálculo de las fuerzas nodales en coordenadas locales, según la siguiente figura, se tienen:

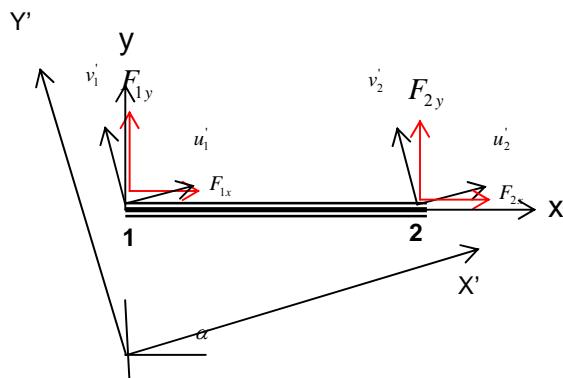


Fig. 3.6 Fuerzas nodales en coordenadas locales.

$$\begin{bmatrix} F_e \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

donde  $F_{1x}$ ,  $F_{1y}$  son las fuerzas en dirección x y y, en el nodo 1,  $F_{2x}$ ,  $F_{2y}$  son las fuerzas en la dirección x y y, en el nodo 2.

Si únicamente interesa calcular las fuerzas en la barra en la dirección del eje local, x:

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Por tanto, las fuerzas nodales en la dirección local, x, de la barra, se obtienen de sustituir la ecuación (3.39) en la (3.41),

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

donde  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $u_2$  y  $v_2$  son los grados de libertad de la barra en coordenadas globales.

Se puede demostrar que la matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$\begin{bmatrix} k_G^e \end{bmatrix} = [T]^T \begin{bmatrix} k^e \end{bmatrix} [T] \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

donde la longitud del elemento es:  $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$c = \frac{(x_2 - x_1)}{L} = \cos \alpha$$

$$s = \frac{(y_2 - y_1)}{L} = \operatorname{sen} \alpha$$

### EJEMPLO 3.2

Calcular los elementos mecánicos en las barras de la armadura plana de la figura, cuyos elementos tienen las siguientes propiedades:

Elemento	Área (in <sup>2</sup> )	Longitud (in)	$\frac{AE}{L}$ (kips/in)	$\cos \alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$
1	12	240	1500.0	0.800	0.600
2	12	180	2000.0	0.600	-0.800
3	8	300	800.0	1.000	0.000

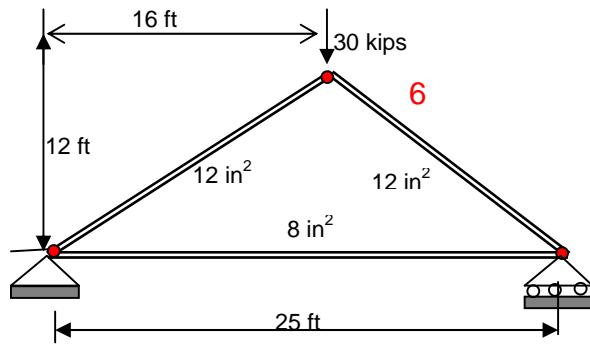


Fig. 3.7 Armadura del ejemplo 3.2.

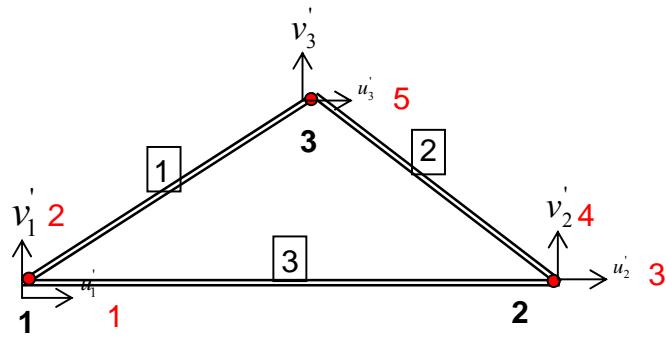


Fig. 3.8 Topología del modelo.

Empleando la matriz (3.44) formamos la matriz de rigidez elemental referida a ejes globales, para cada barra,

### BARRA 1

$$[k_G^1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ u'_1 & v'_1 & u'_3 & v'_3 \\ 960 & 720 & -960 & -720 \\ 720 & 540 & -720 & -540 \\ -960 & -720 & 960 & 720 \\ -720 & -540 & 720 & 540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \text{ kips/in}$$

### BARRA 2

$$[K_G^2] = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 \\ u'_3 & v'_3 & u'_2 & v'_2 \\ 720 & -960 & -720 & 960 \\ -960 & 1280 & 960 & -1280 \\ -720 & 960 & 720 & -960 \\ 960 & -1280 & -960 & 1280 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} \text{ kips/in}$$

**BARRA 3**

$$[k_G^3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 800 & 0 & -800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -800 & 0 & 800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ kips/in}$$

La matriz total, referida a coordenadas globales es:

$$[k_G] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1760 & 720 & -800 & 0 & -960 & -720 \\ 720 & 540 & 0 & 0 & -720 & -540 \\ -800 & 0 & 1520 & -960 & -720 & 960 \\ 0 & 0 & -960 & 1280 & 960 & -1280 \\ -960 & -720 & -720 & 960 & 1680 & -240 \\ -720 & -540 & 960 & -1280 & -240 & 1820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ kips/in}$$

De la relación:

$$[k_G][U_G] = [F_G]$$

Por las condiciones de frontera o de restricción:

En el apoyo fijo:

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

En el apoyo móvil:

$$v_2 = 0$$

Tenemos que la operación:

$$\begin{bmatrix} 1760 & 720 & -800 & 0 & -960 & -720 \\ 720 & 540 & 0 & 0 & -720 & -540 \\ -800 & 0 & 1520 & -960 & -720 & 960 \\ 0 & 0 & -960 & 1280 & 960 & -1280 \\ -960 & -720 & -720 & 960 & 1680 & -240 \\ -720 & -540 & 960 & -1280 & -240 & 1820 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

Condensando la matriz,

$$\begin{bmatrix} 1520 & -720 & 960 \\ -720 & 1680 & -240 \\ 960 & -240 & 1820 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo para los grados de libertad en coordenadas globales, es decir para los desplazamientos nodales,

$$[U_G] = \begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.01800 \\ 0.00000 \\ 0.00408 \\ -0.02544 \end{pmatrix} \begin{matrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \end{matrix} \text{ in}$$

Sustituyendo en la relación previamente deducida,

$$\begin{bmatrix} 1760 & 720 & -800 & 0 & -960 & -720 \\ 720 & 540 & 0 & 0 & -720 & -540 \\ -800 & 0 & 1520 & -960 & -720 & 960 \\ 0 & 0 & -960 & 1280 & 960 & -1280 \\ -960 & -720 & -720 & 960 & 1680 & -240 \\ -720 & -540 & 960 & -1280 & -240 & 1820 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.01800 \\ 0.00000 \\ 0.00408 \\ -0.02544 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ 0 \\ R_{2y} \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para el vector de cargas nodales,

$$\begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ 0 \\ R_{2y} \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 10.80 \\ 0.000 \\ 19.20 \\ 0.000 \\ -30.0 \end{pmatrix} \text{ kips}$$

Para encontrar los elementos mecánicos en las barras, es decir, las fuerzas axiales (con referencia a ejes locales), se sustituye en (3.42), los valores de los desplazamientos nodales en cada barra,

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

### BARRA 1

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = 1500 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.00408 \\ -0.02544 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.00 \\ -18.00 \end{bmatrix} \text{ kips}$$

Con respecto a los ejes locales la Barra 1 está en compresión.

**BARRA 2**

$$\begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = 2000 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & -0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00408 \\ -0.02544 \\ 0.018000 \\ 0.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{3x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.00 \\ -24.00 \end{bmatrix} \quad \text{kips}$$

Con respecto a los ejes locales la Barra 2 está en compresión.

**BARRA 3**

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = 800 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 0.018000 \\ 0.000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.40 \\ 14.40 \end{bmatrix} \quad \text{kips}$$

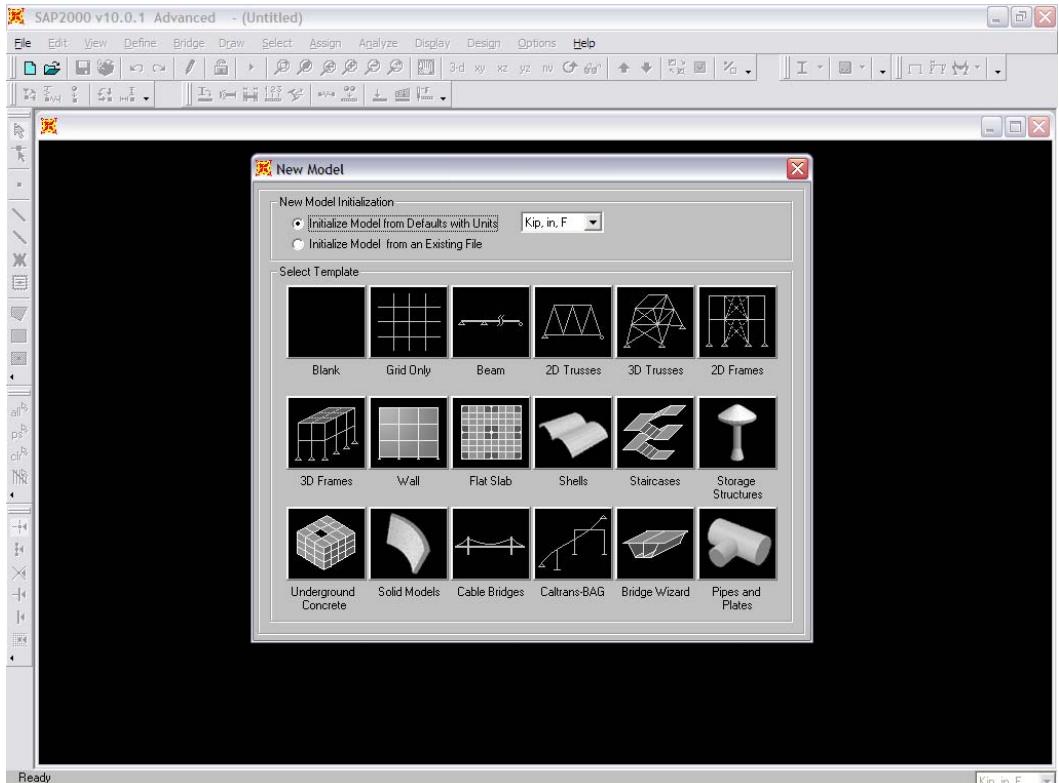
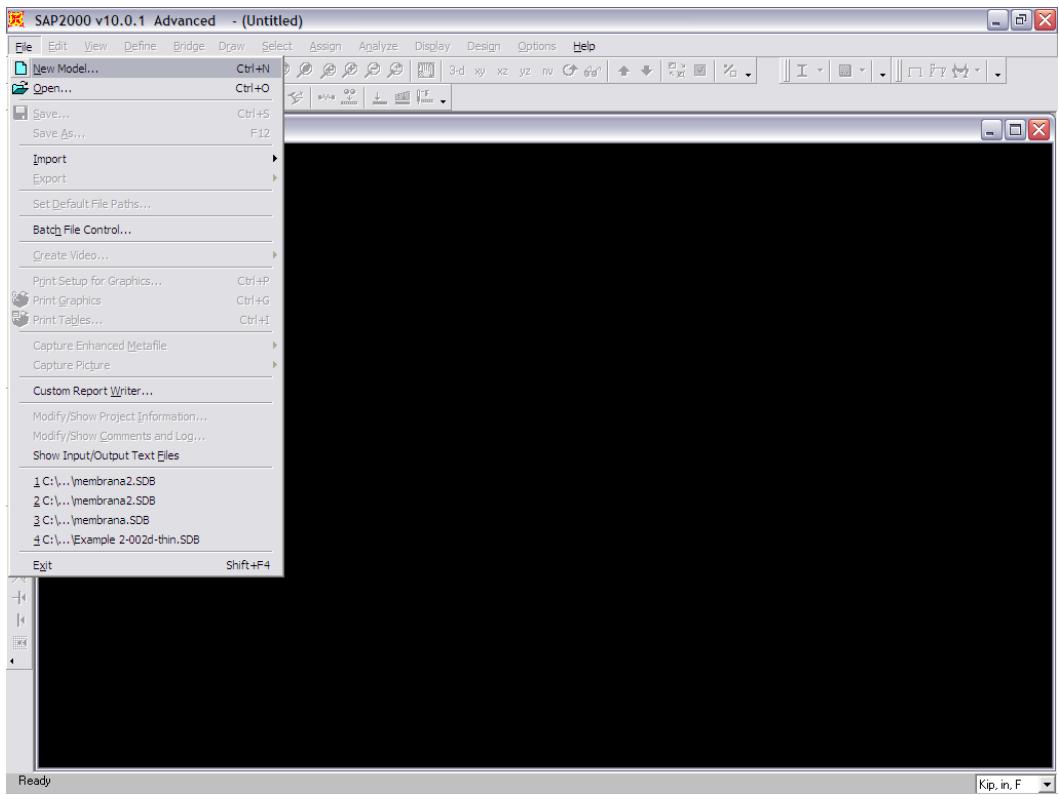
Con respecto a los ejes locales la Barra 3 está en tensión.

A continuación se explica paso a paso como realizar el ejemplo de la armadura en el programa SAP 2000 V.10.

**ARMADURA DEL EJEMPLO 3.2 [P.65.]**

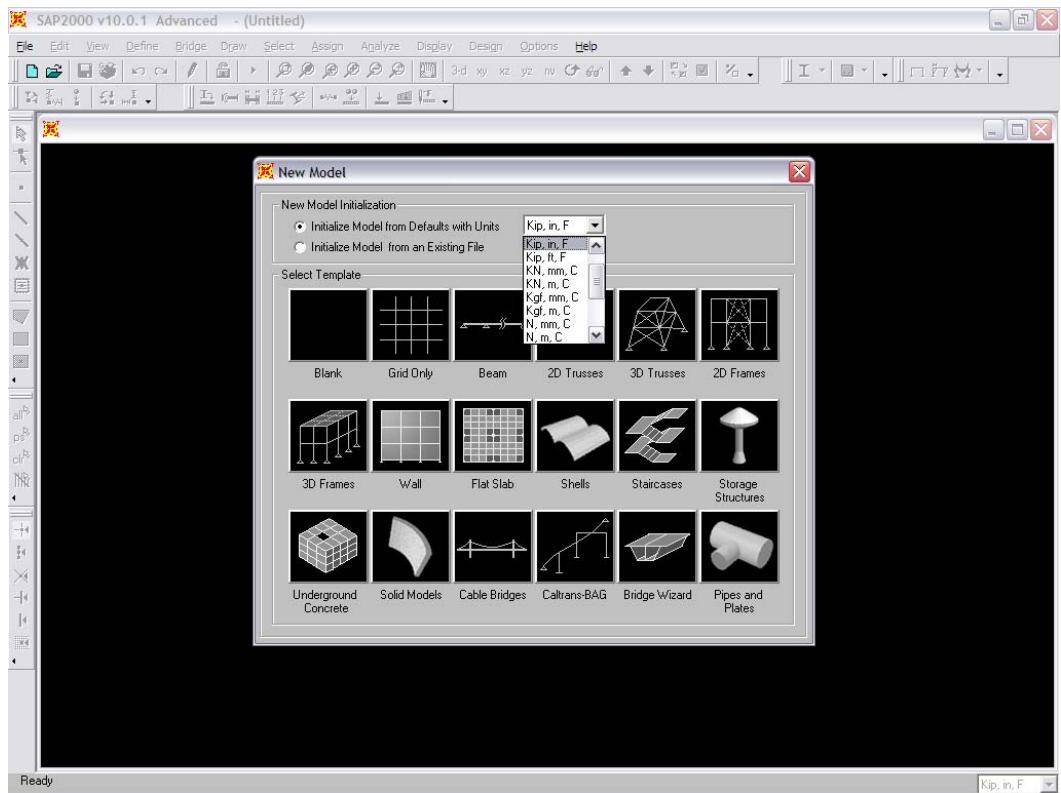
**1.- CREACIÓN DE UN ARCHIVO NUEVO**

File > New Model

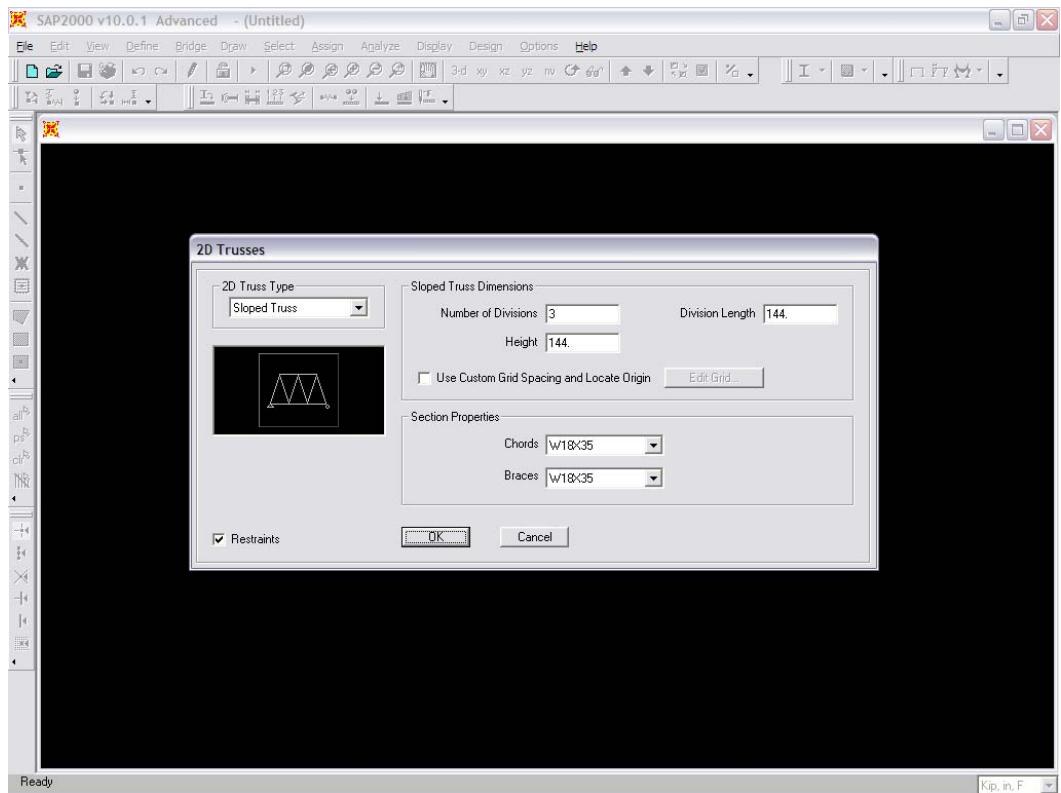


Initialize Model from Defaults with Units [seleccionar unidades]

Kip, in, F [kips, inches, farenheit]

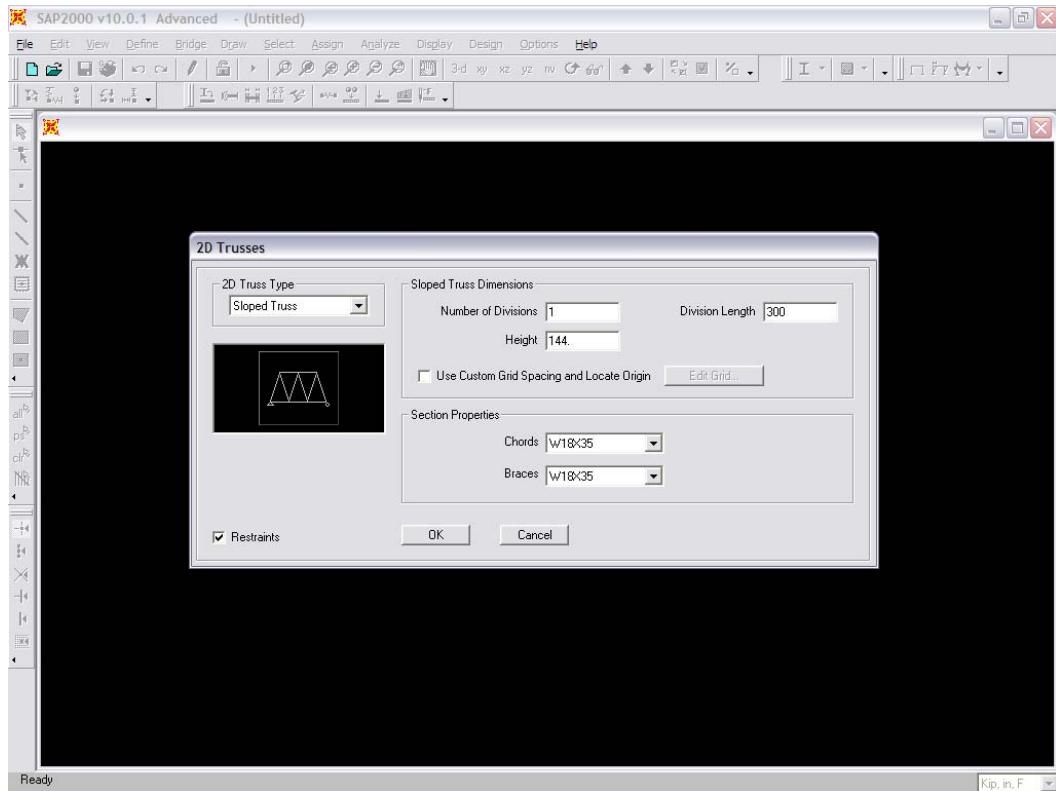


Dar clic en 2D Trusses [armaduras]

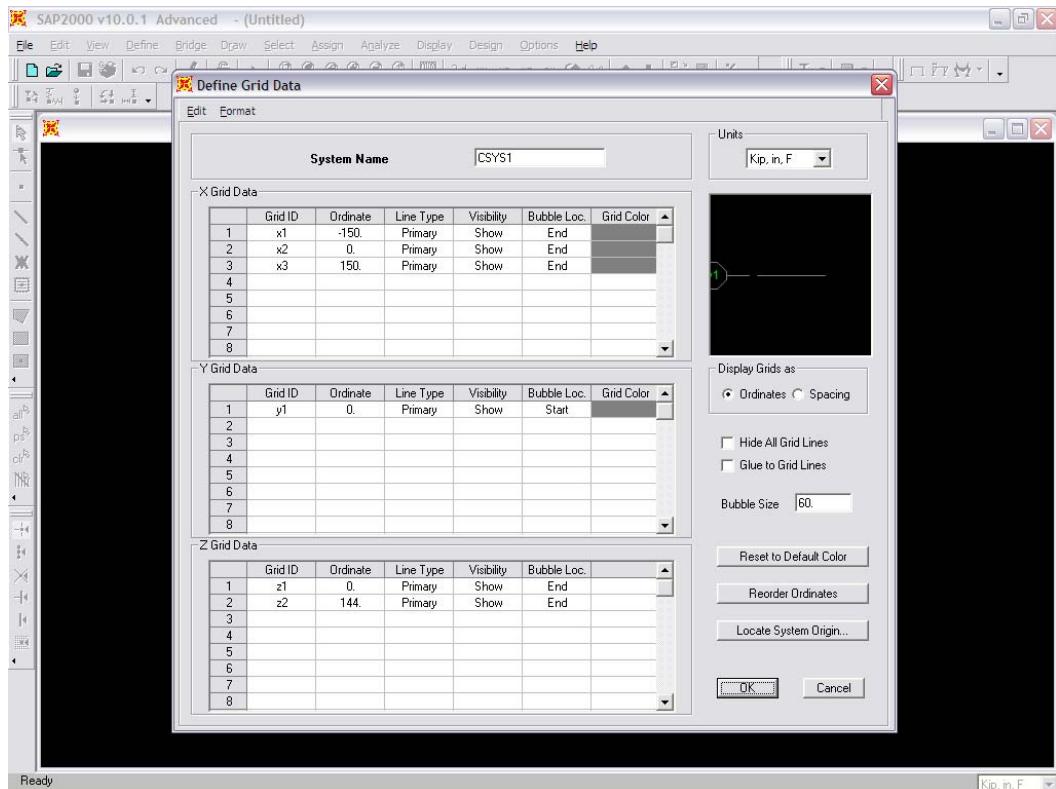


Number of Divisions 1 [número de divisiones]

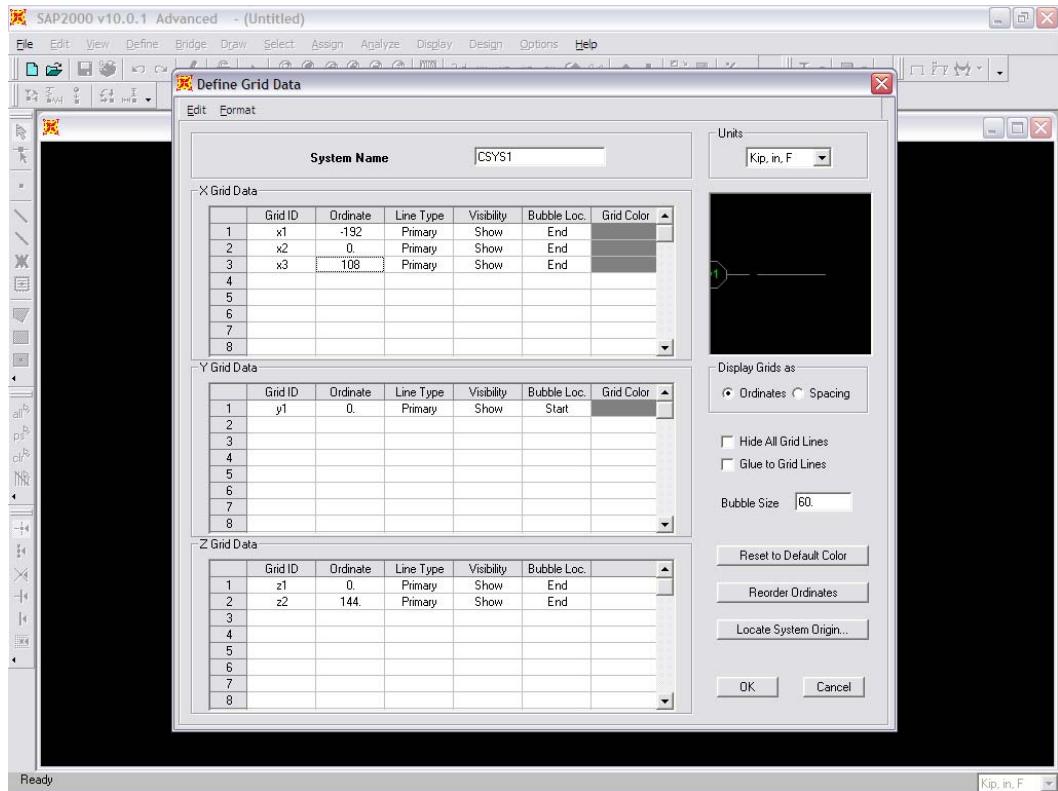
Height 144 [in] [altura]  
 Division length 300 [in] [longitud]



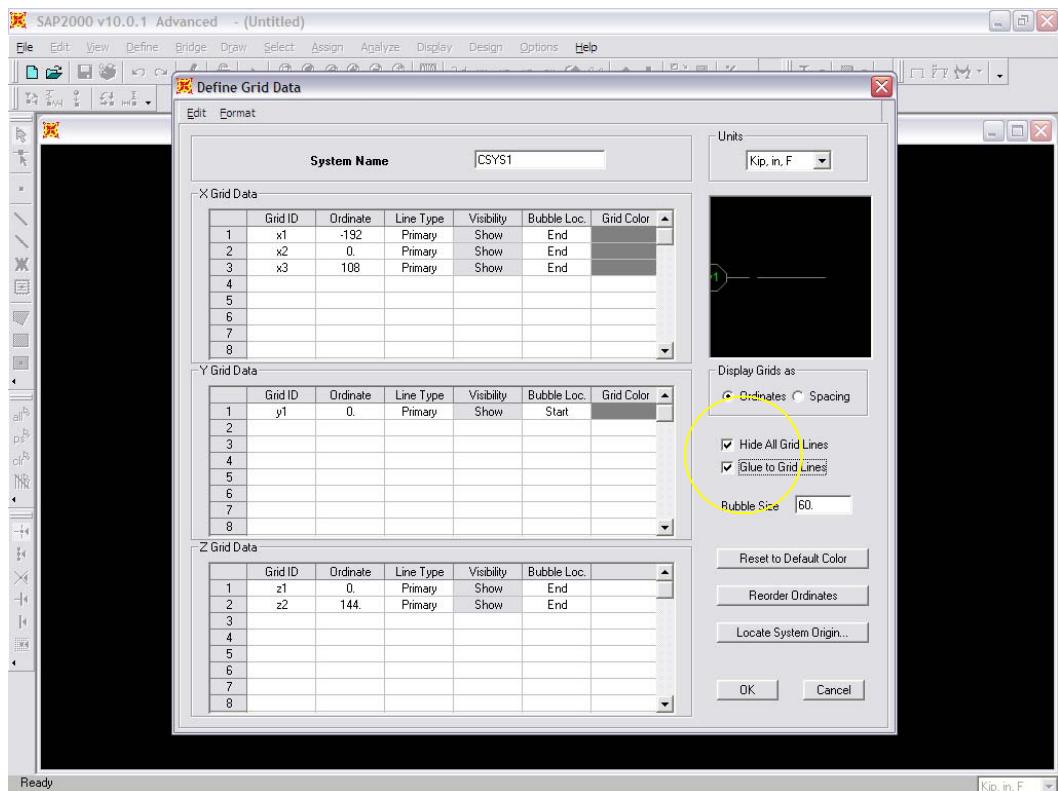
Palomear la casilla: Use Custom Grid Spacing and Locate Origin y dar clic en Edit Grid



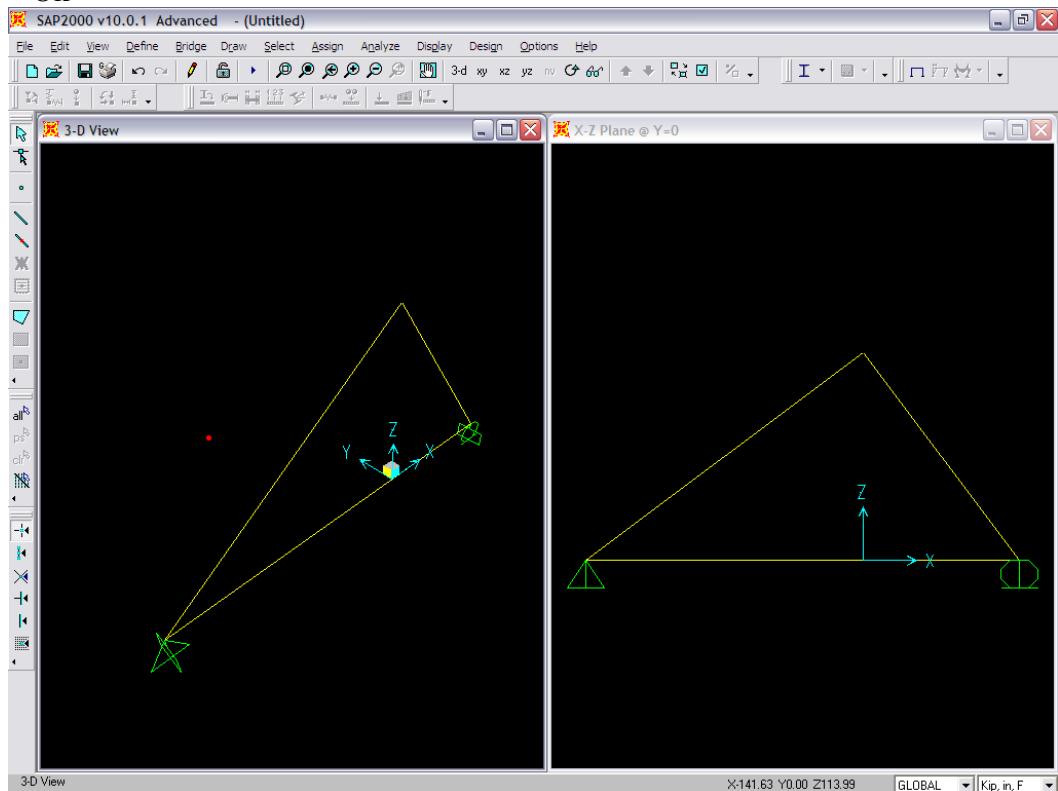
En la segunda columna “Ordinate” cambiar x1 a -192 y x3 a 108



Palomear las casillas: Hide All Grid Lines y Glue to Grid Lines [derecha]

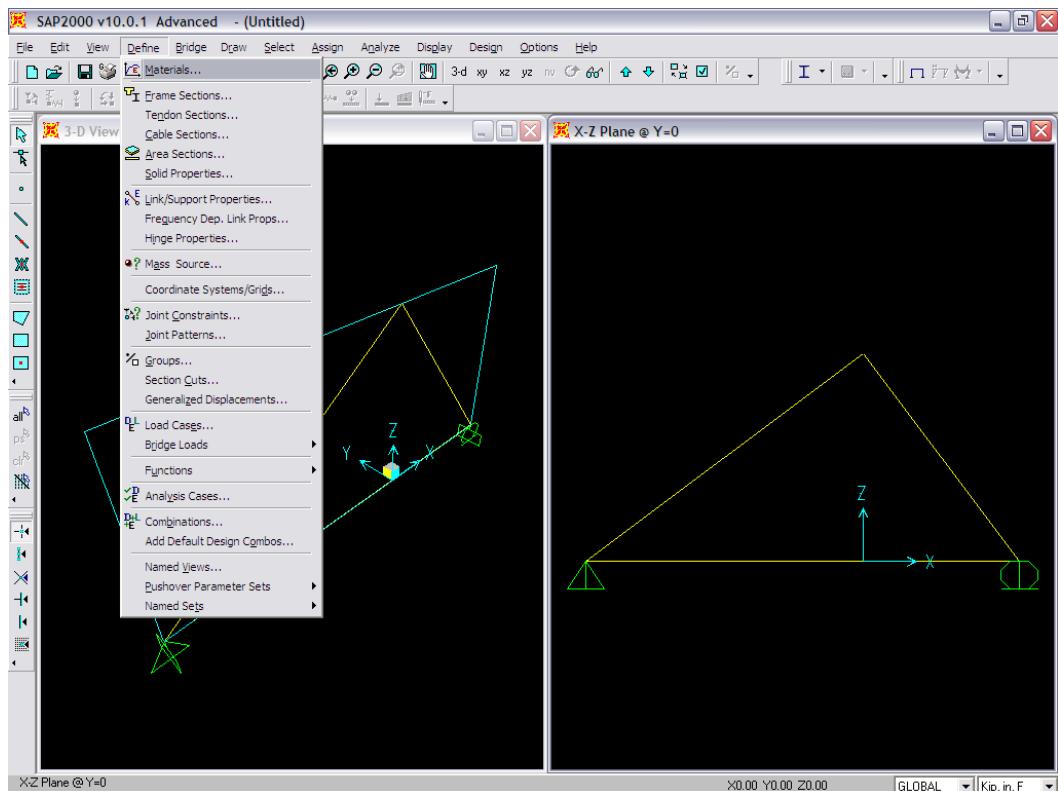


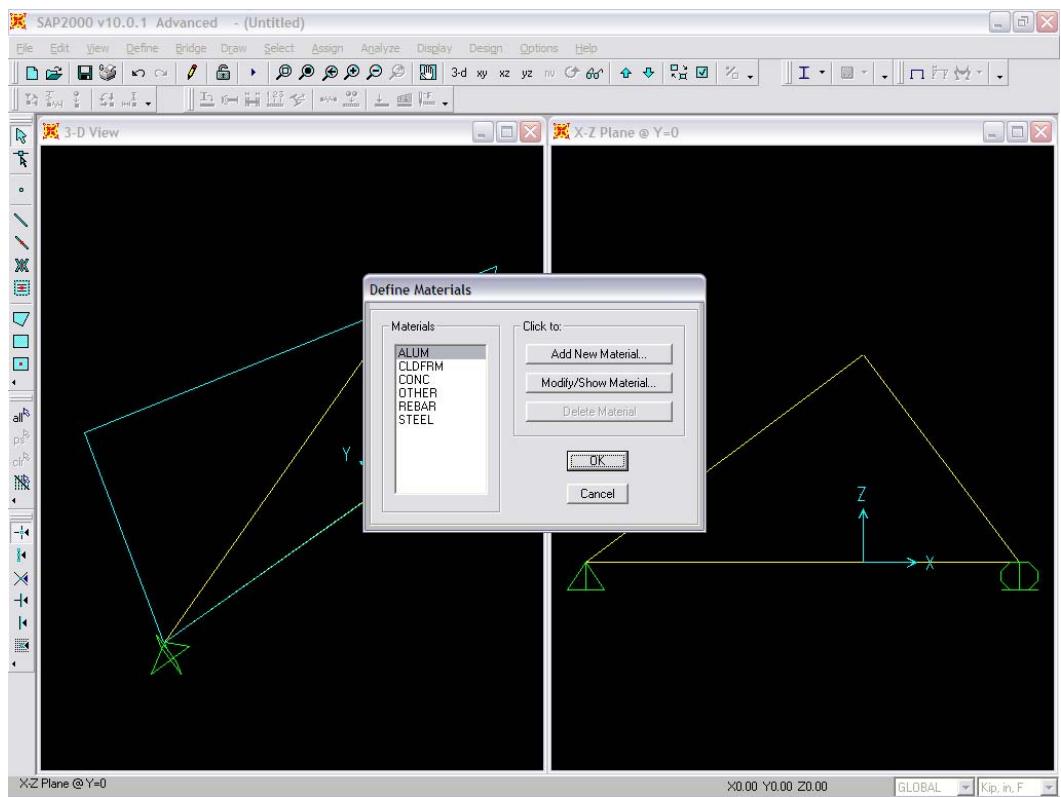
Ok > Ok



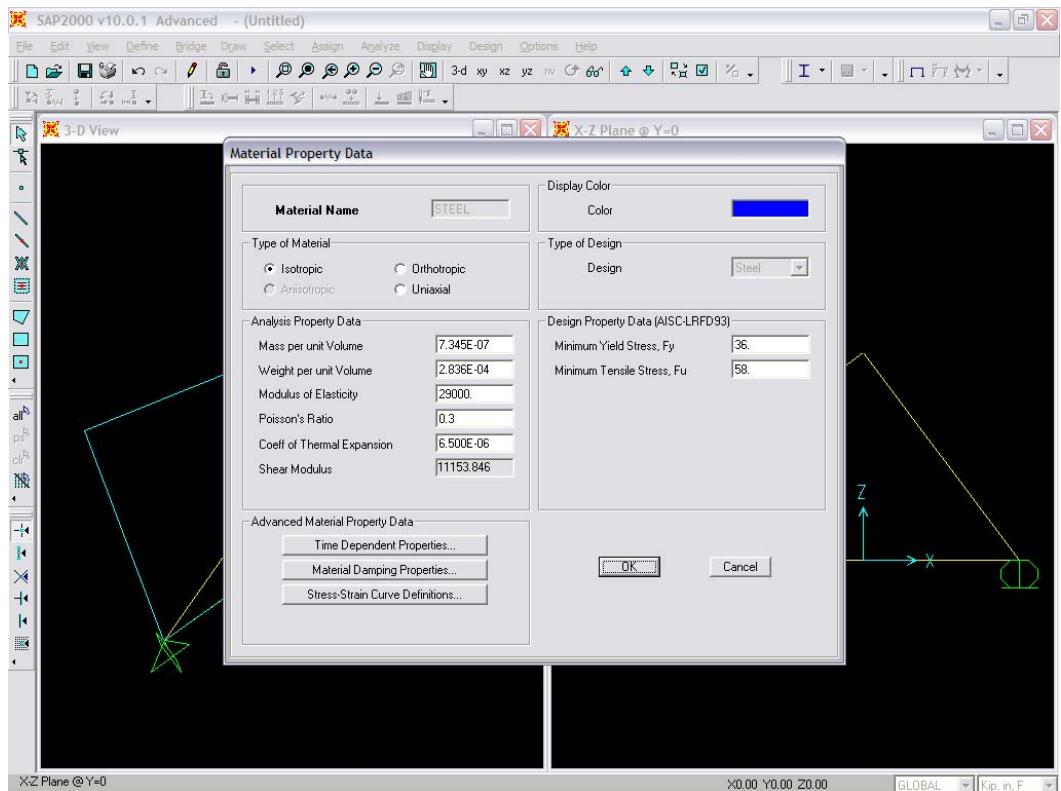
Escoger un lado para trabajar, en éste ejemplo trabajaremos del lado derecho [dar clic en ventana derecha]

**2.- DEFINIR MATERIALES** Define > Materials



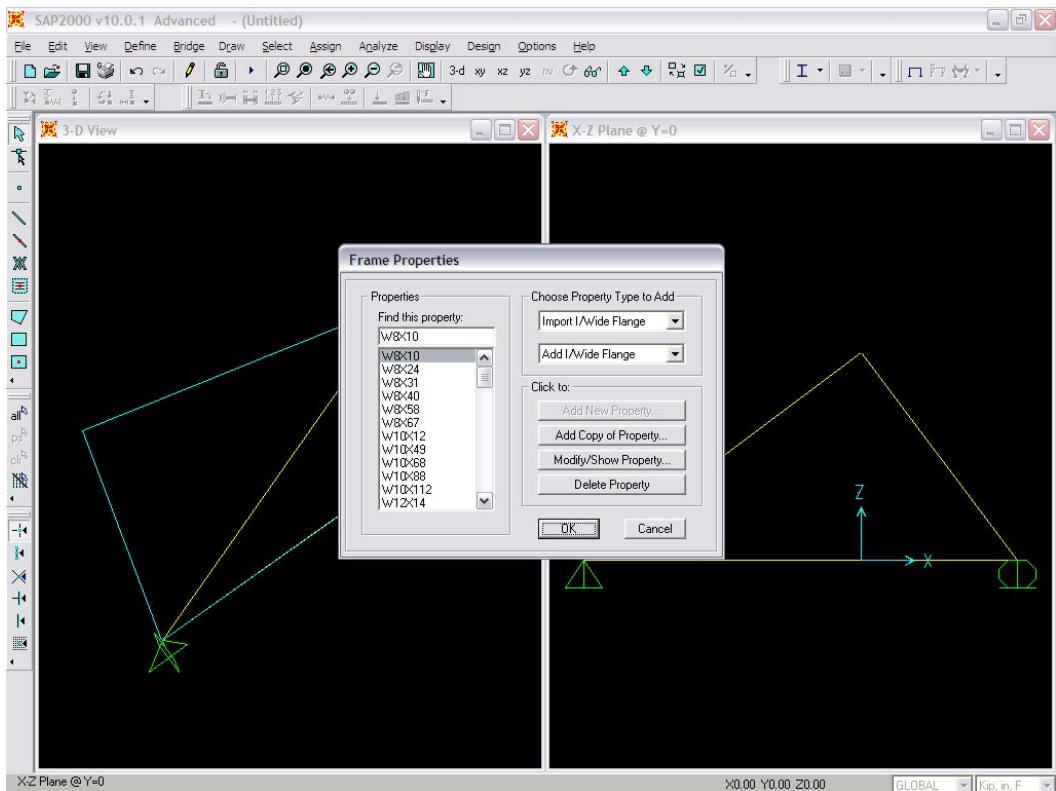
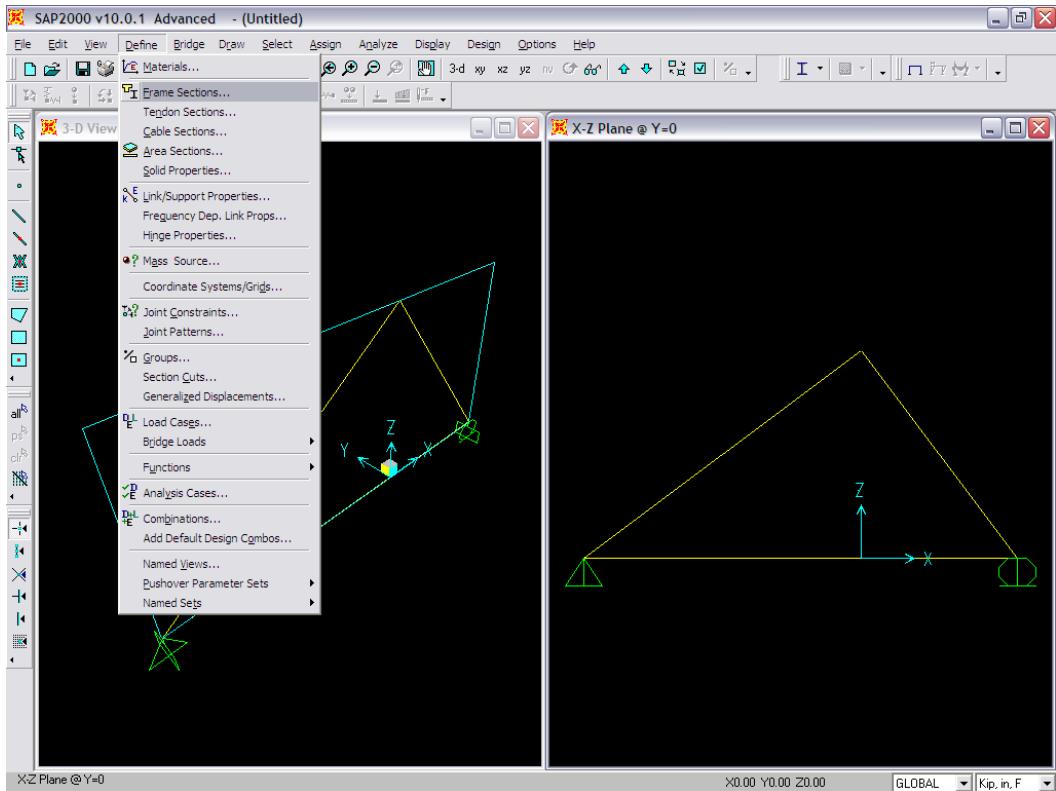


### Steel > Modify/Show Material

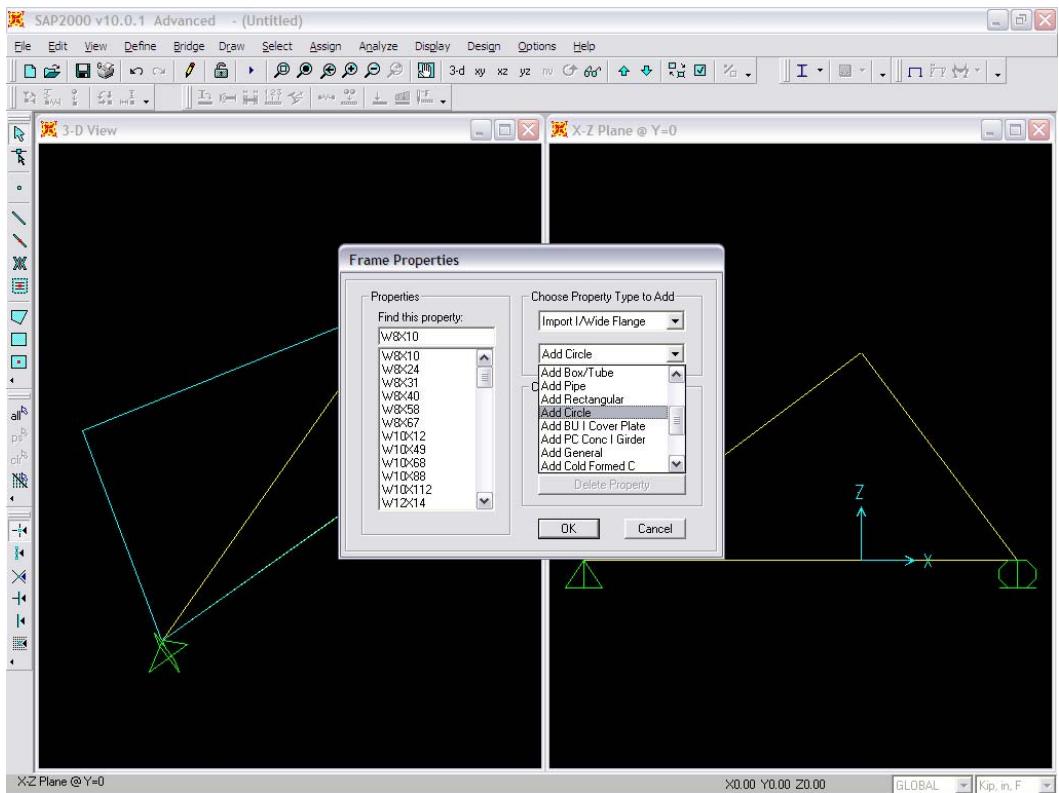


Modulus of Elasticity > 30 000 > Ok > Ok

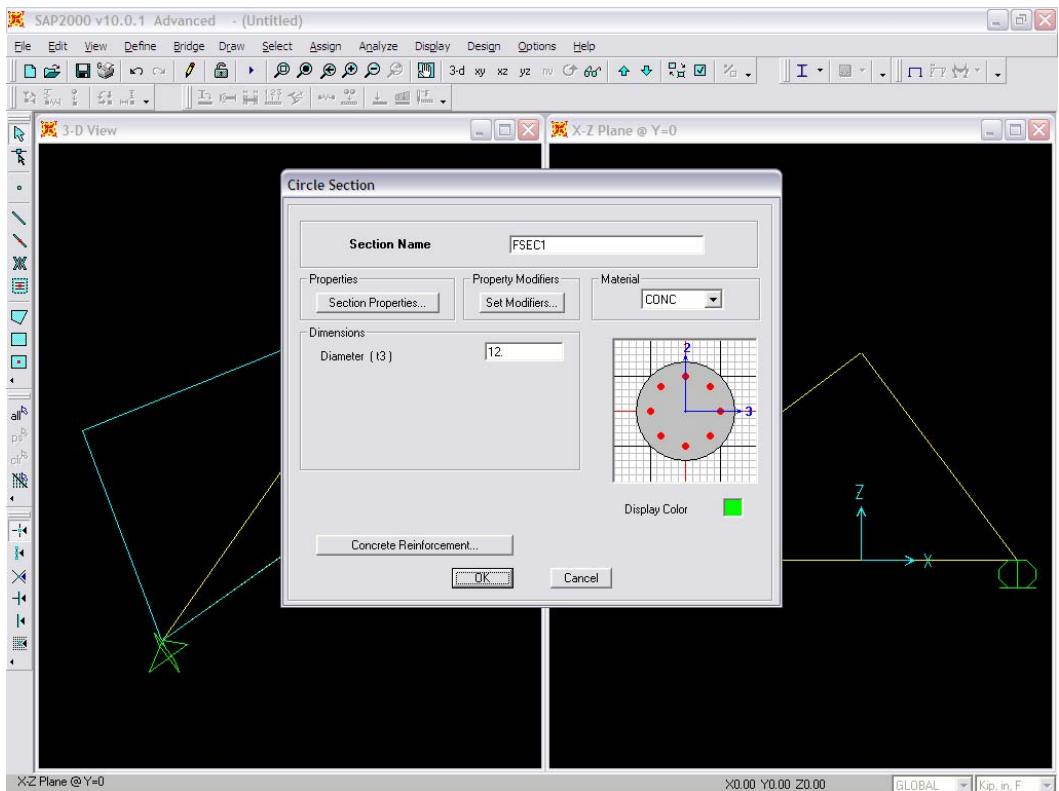
3.- DEFINIR SECCIONES Define > Frame Sections



Choose Property Type to Add > Add Circle

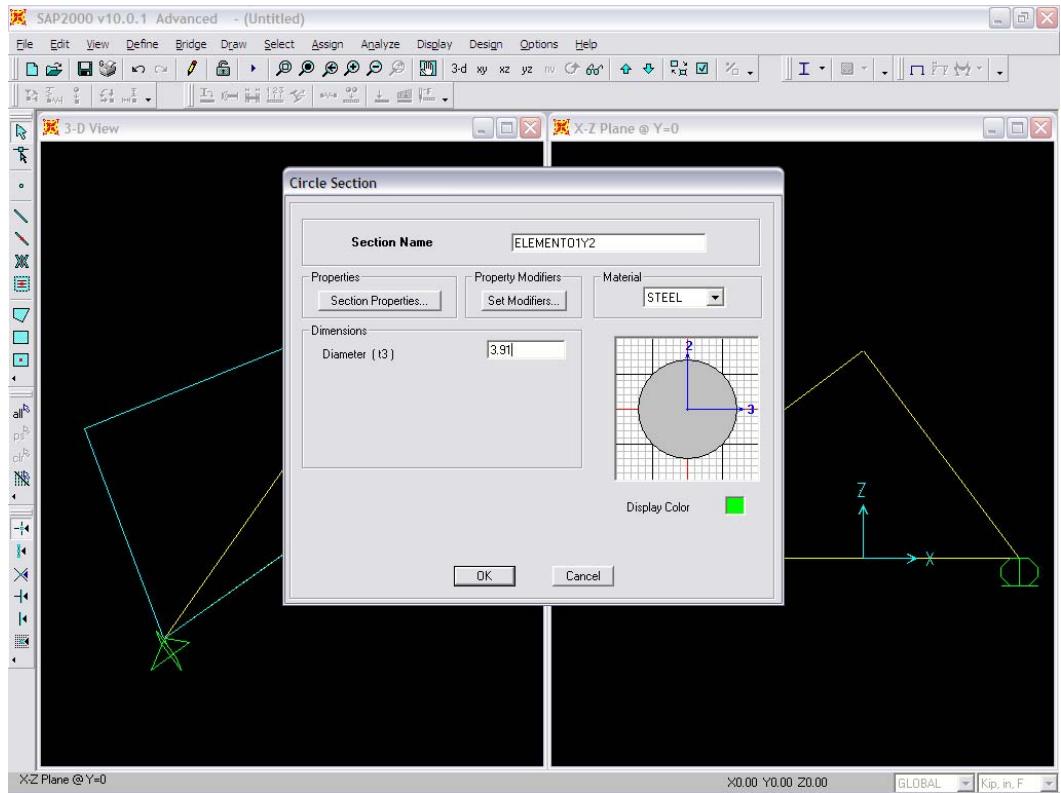


Click to > Add New Property

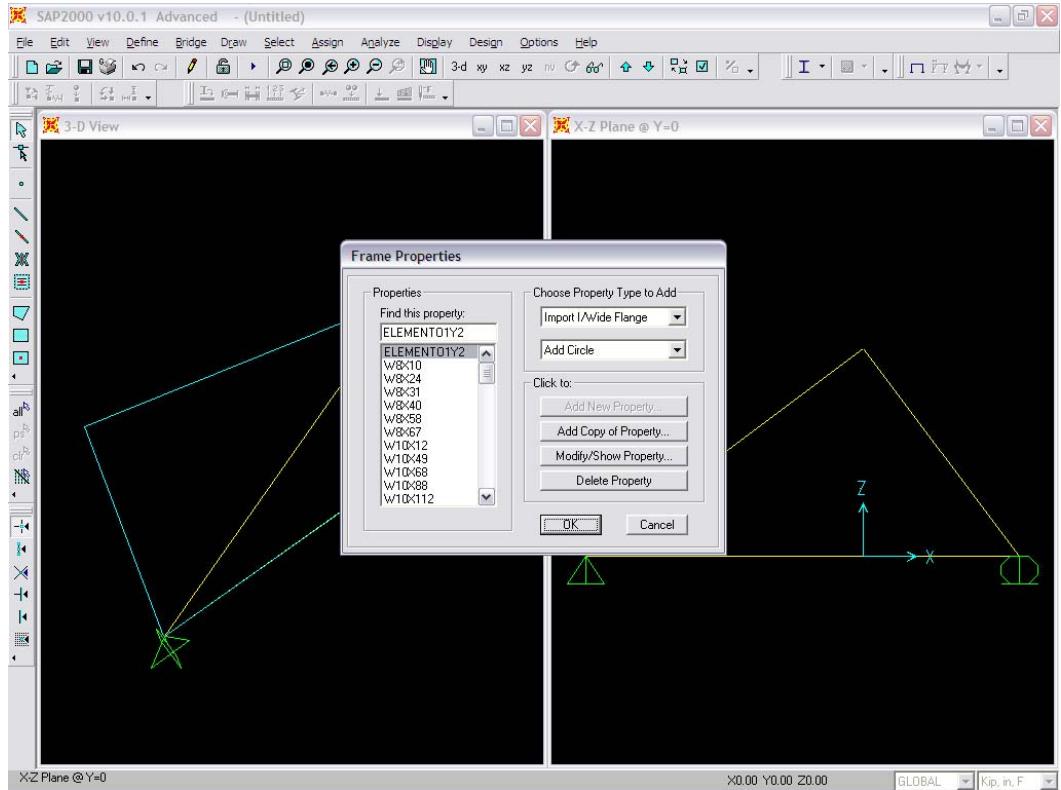


Section Name > Elemento 1 y 2 [nombre de la sección]

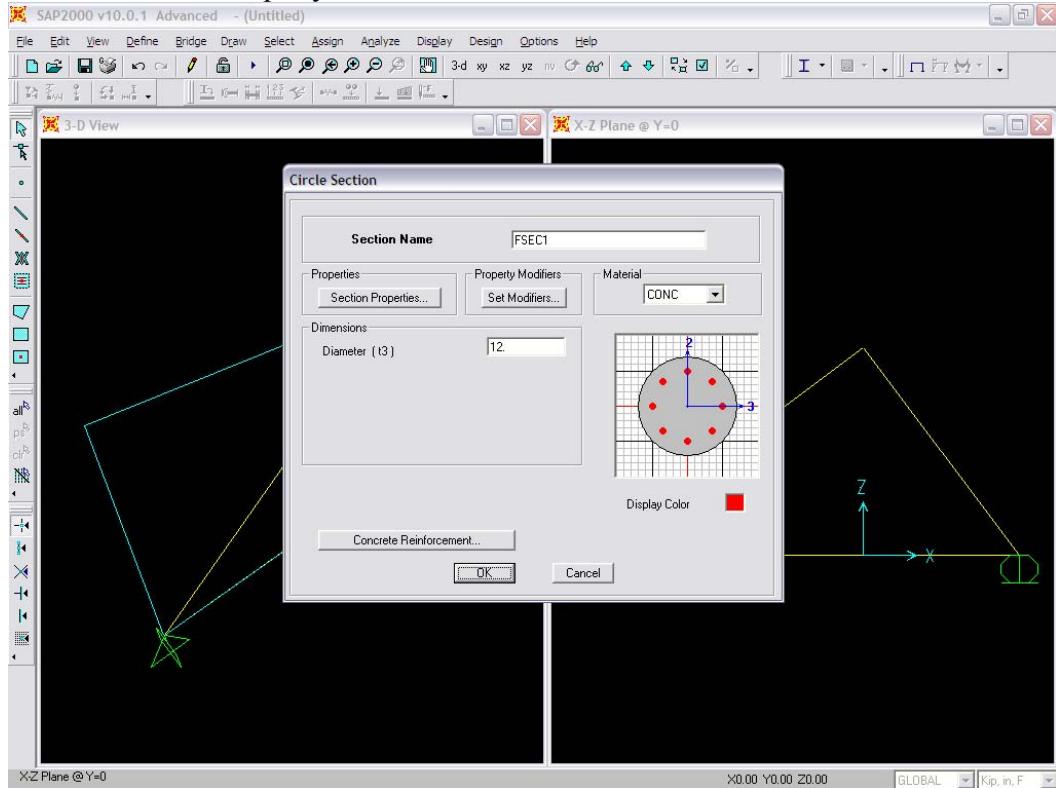
Material > Steel [material]  
 Diameter > 3.91 [diámetro]



Ok



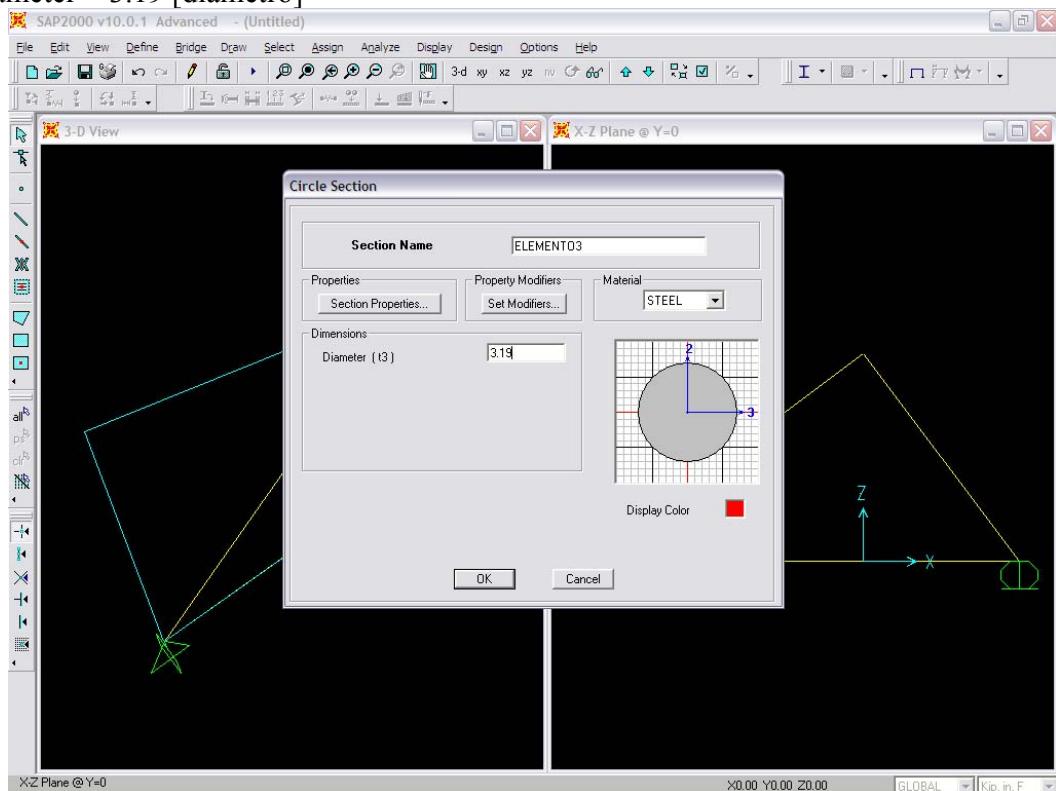
Choose Property Type to Add > Add Circle  
 Click to > Add New Property



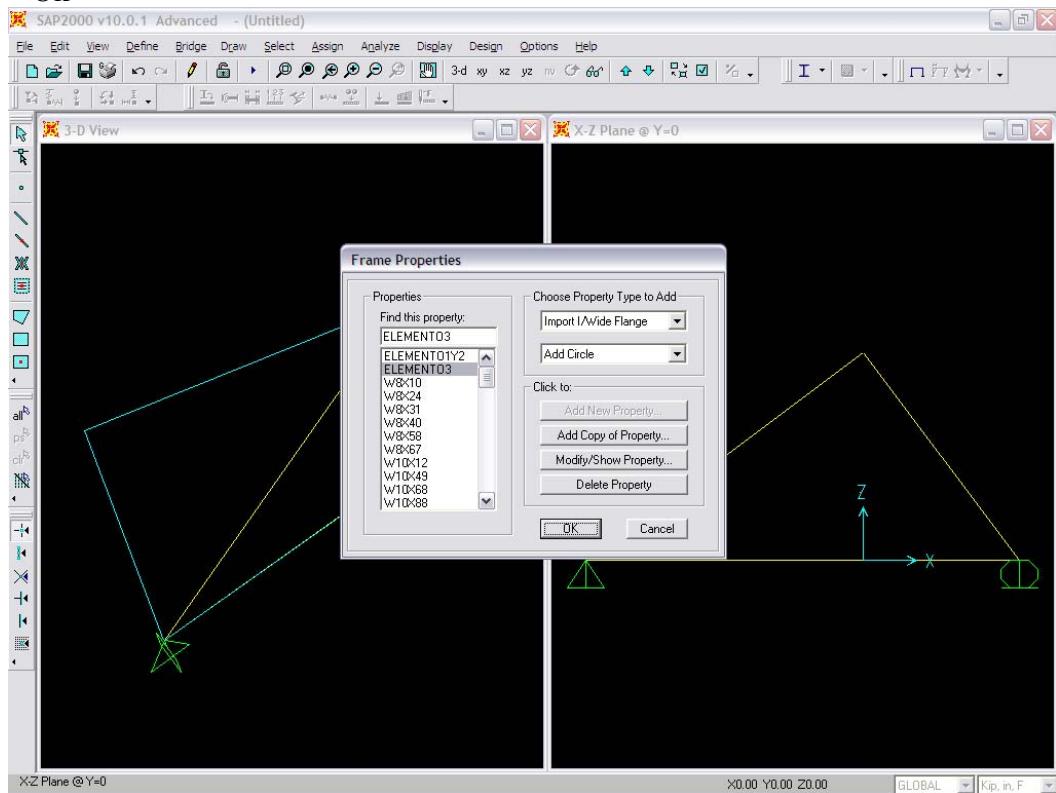
Section Name > Elemento 3 [nombre de la sección]

Material > Steel [material]

Diameter > 3.19 [diámetro]



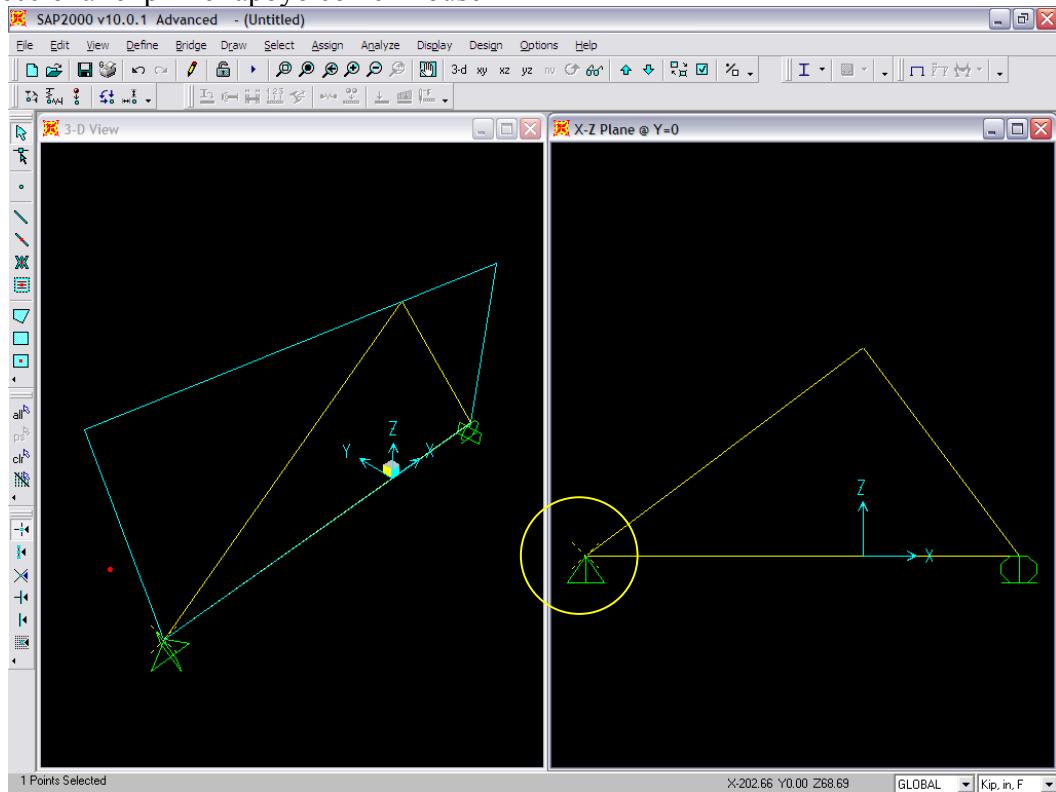
Ok > Ok



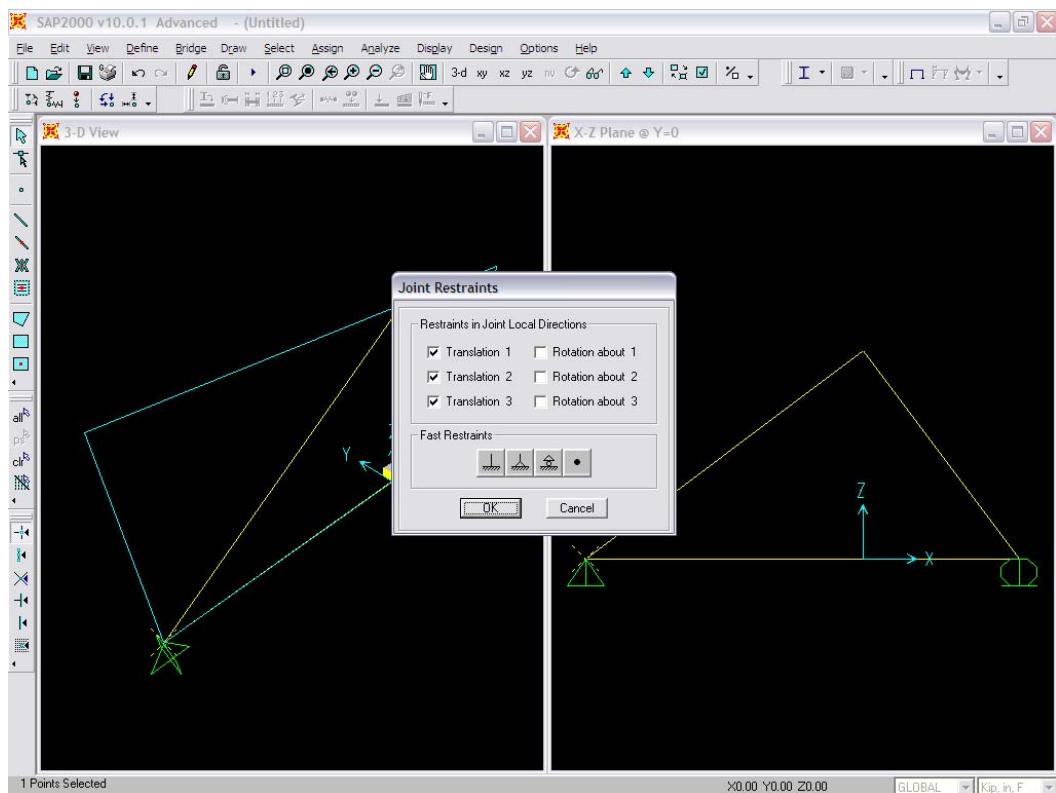
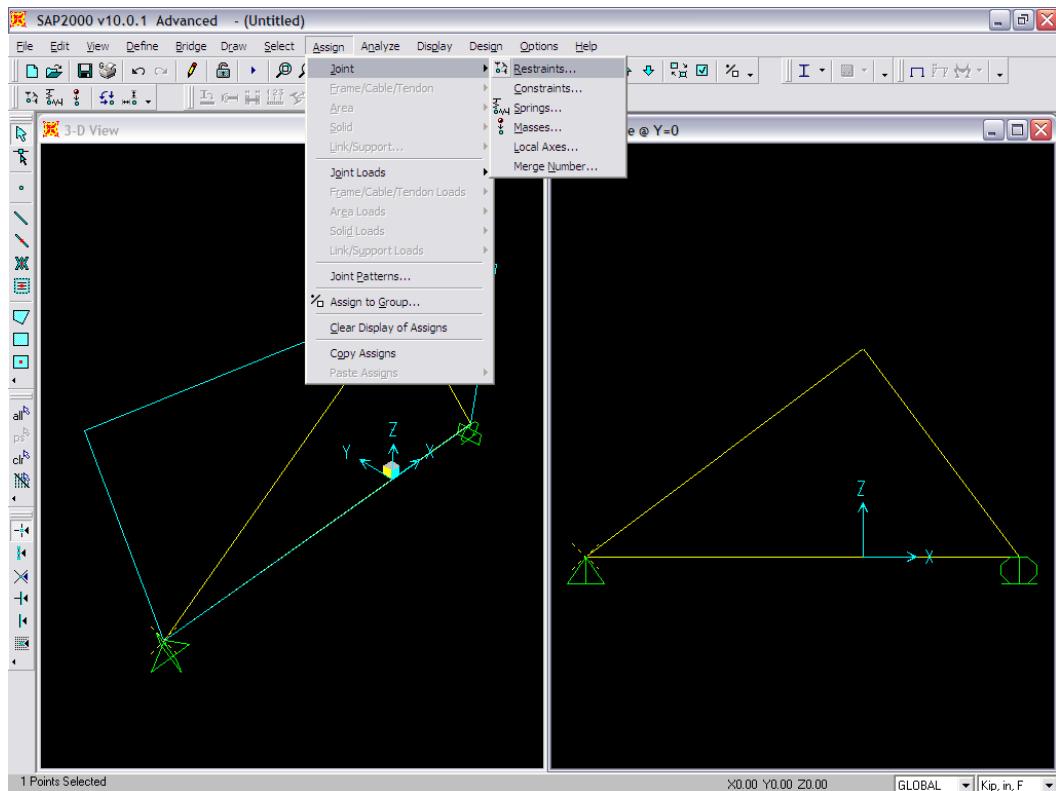
#### 4.- ASIGNAR CONDICIONES DE APOYO, TIPOS DE SECCIONES Y CARGAS

##### 4.1.- Asignar Condiciones de Apoyo

Seleccionar el primer apoyo con el mouse

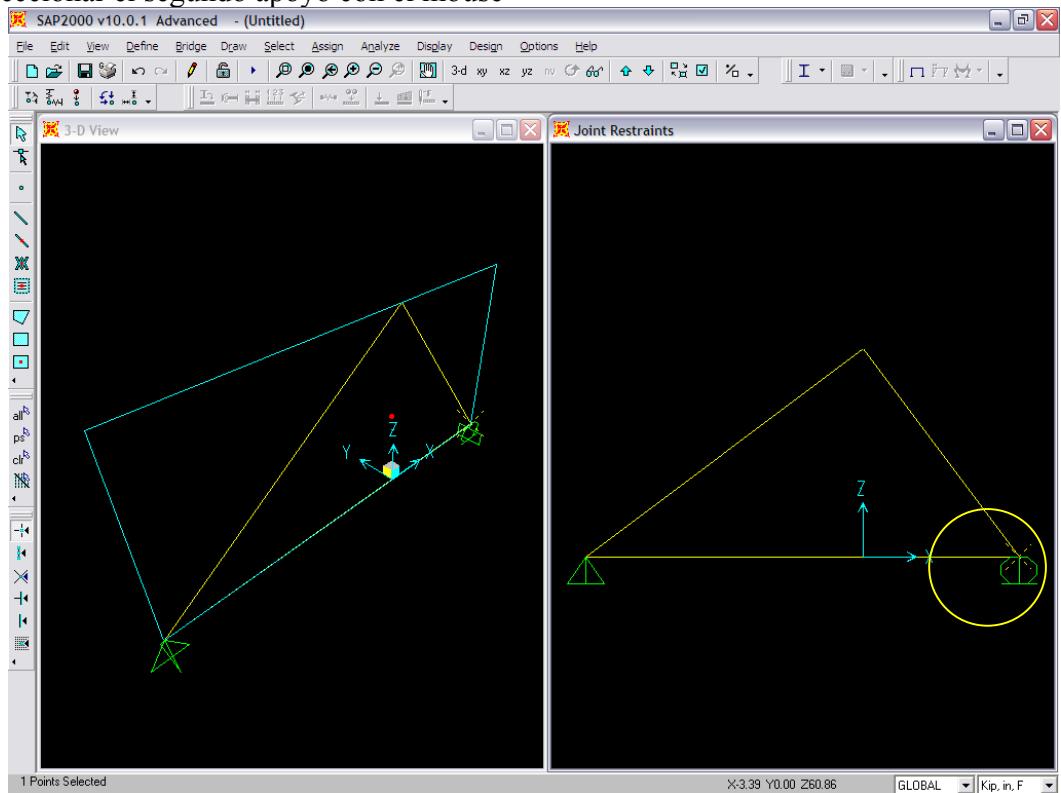


Assign > Joint > Restraints

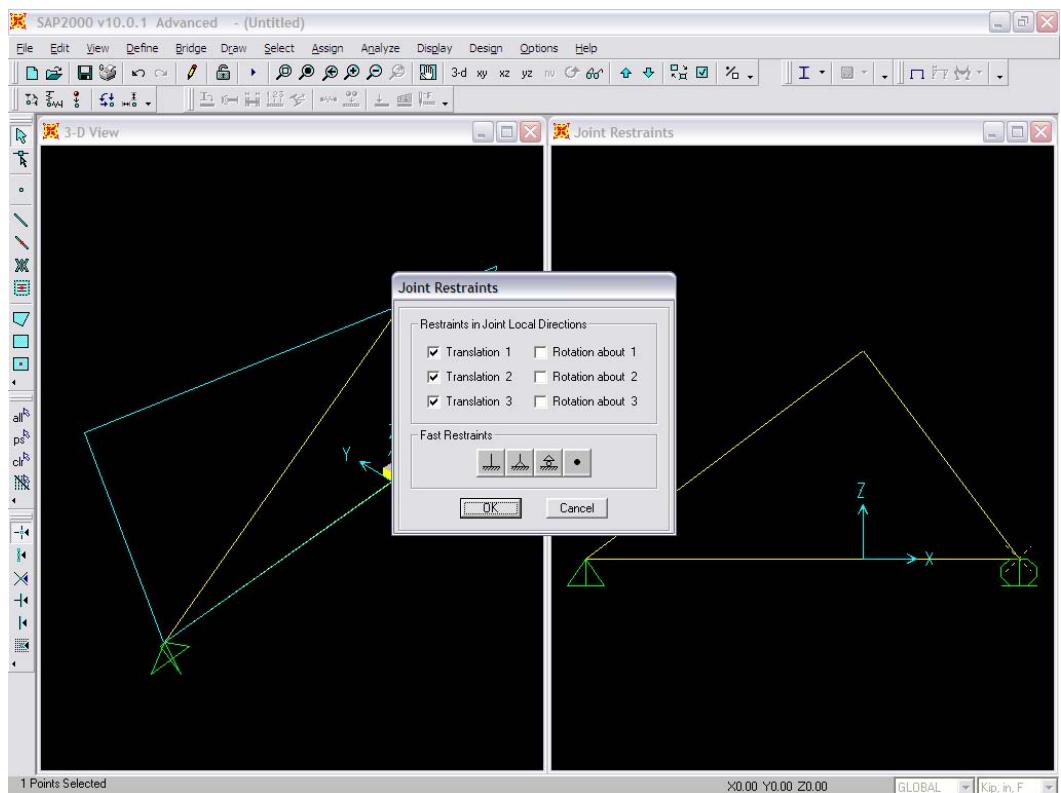


Apoyo fijo > Dar clic > Ok

Seleccionar el segundo apoyo con el mouse



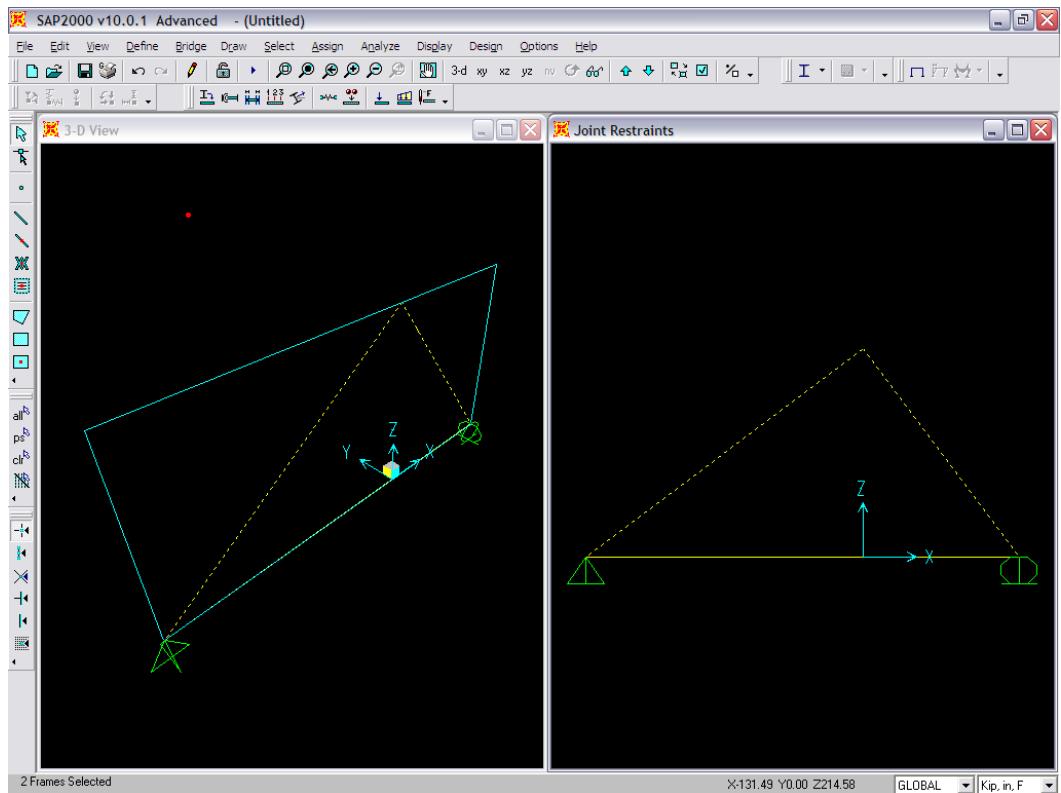
Assign > Joint > Restraints



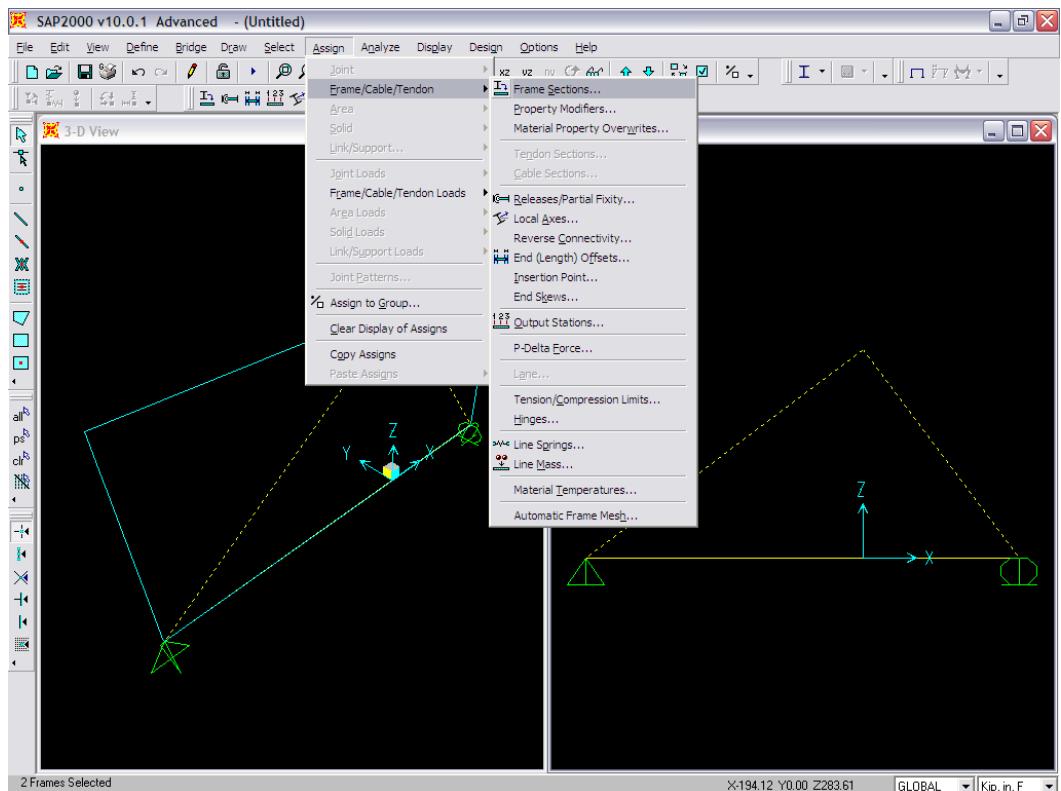
Apoyo móvil > Dar clic > Ok

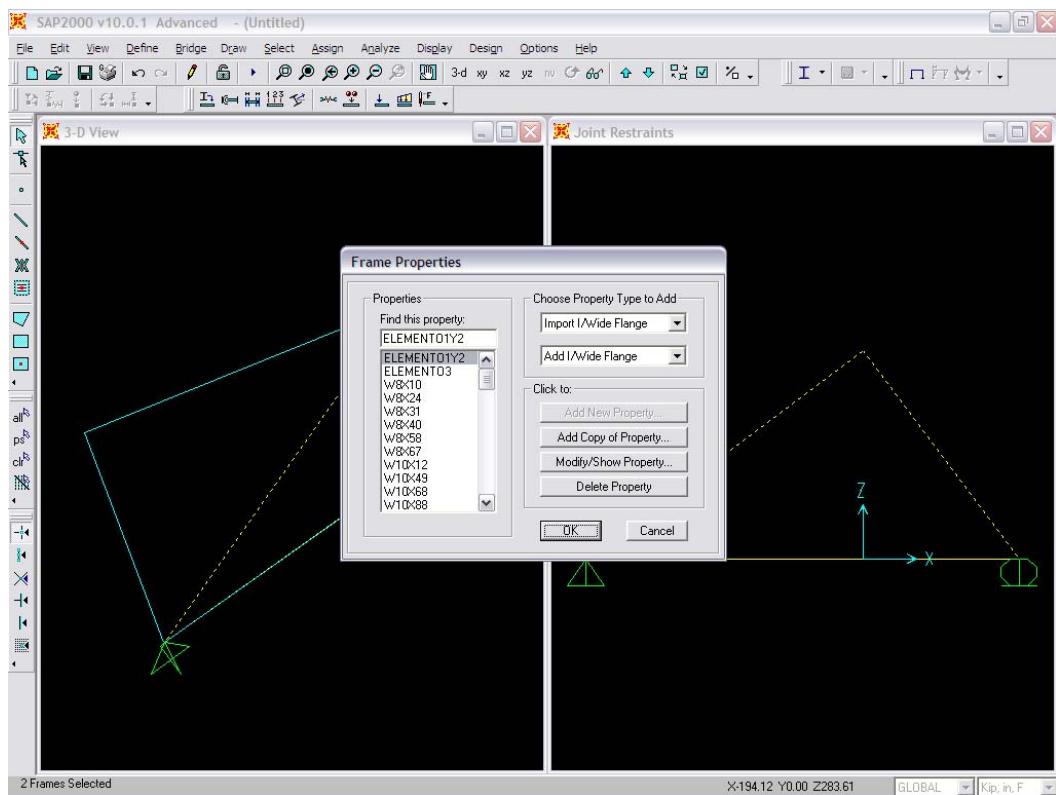
#### 4.2.- Asignar Tipos de Secciones

Seleccionar elemento 1 y 2 con el mouse

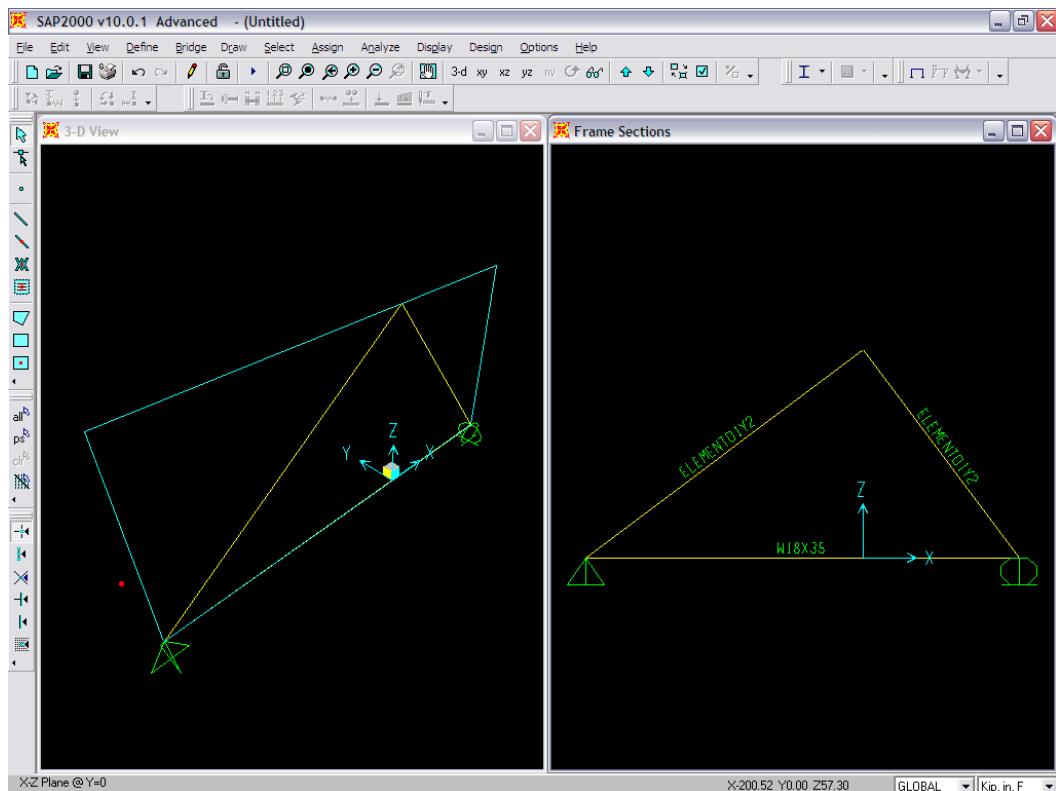


Assign > Frame/Cable/Tendon > Frame Sections

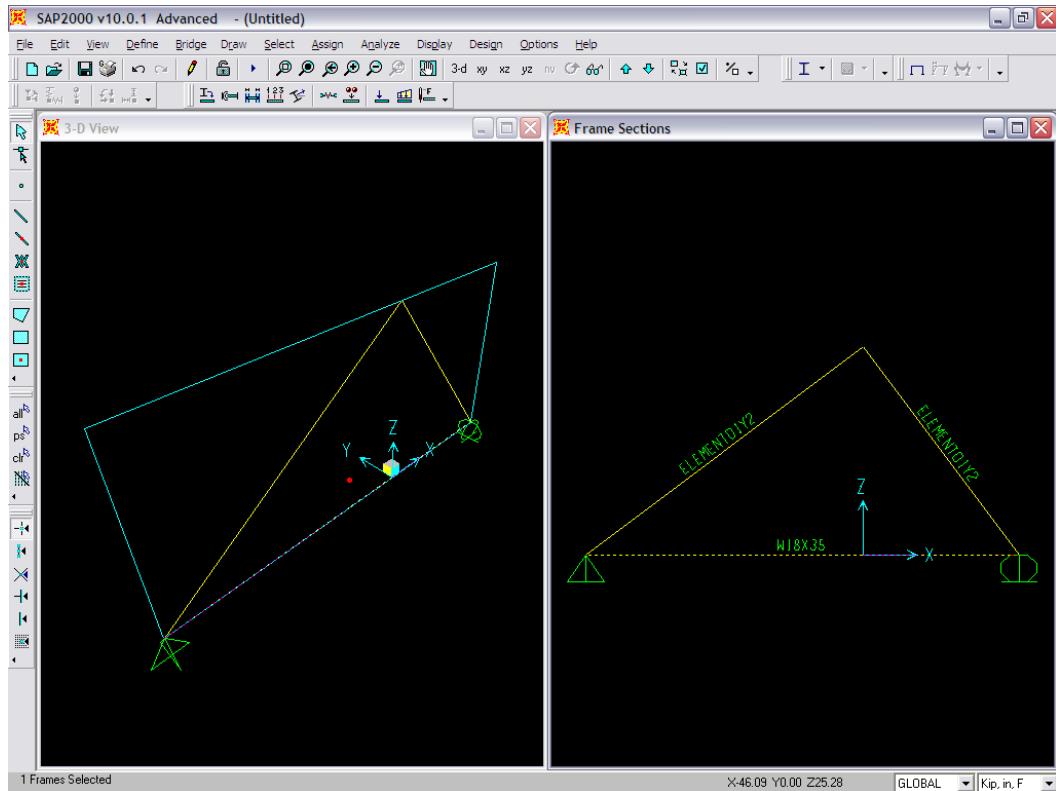




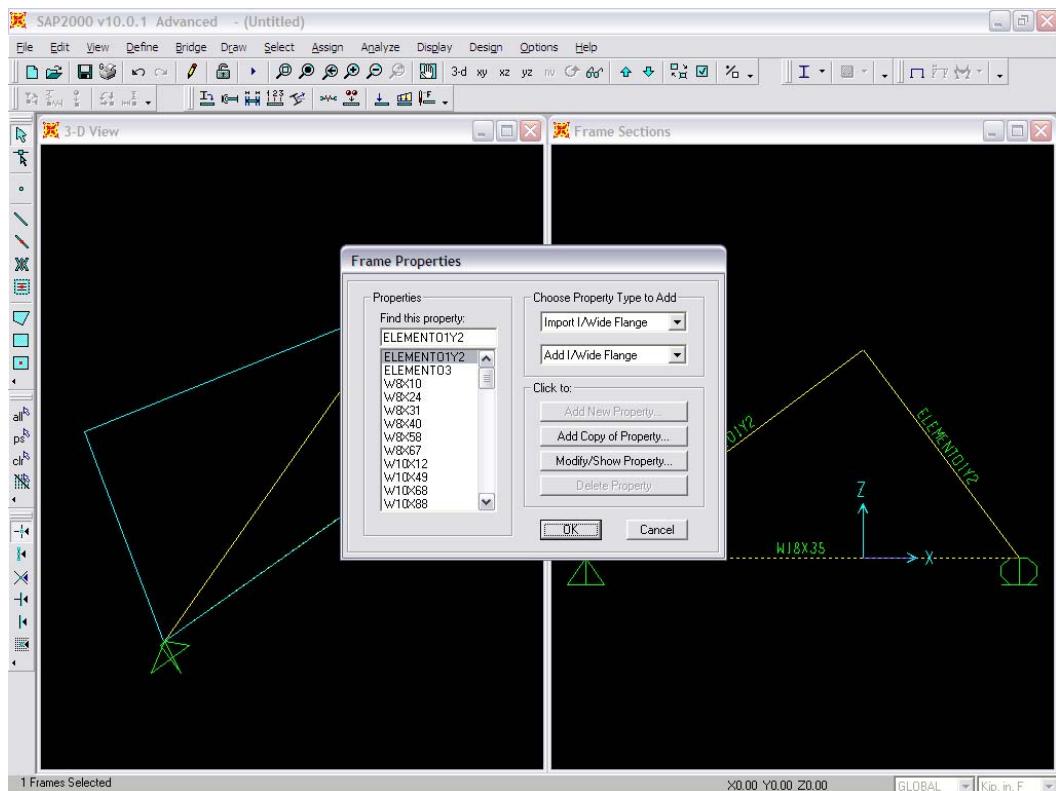
Seleccionar Elemento 1 y 2 > Ok



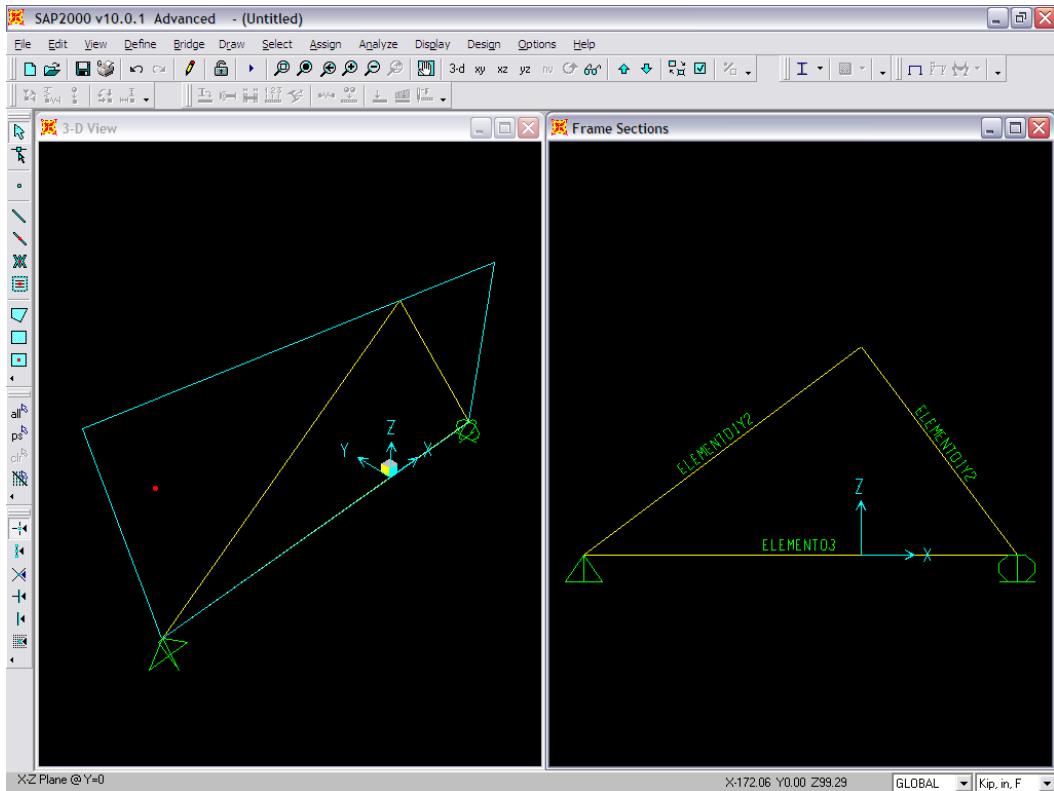
Seleccionar elemento 3 con el mouse



Assign > Frame/Cable/Tendon > Frame Sections

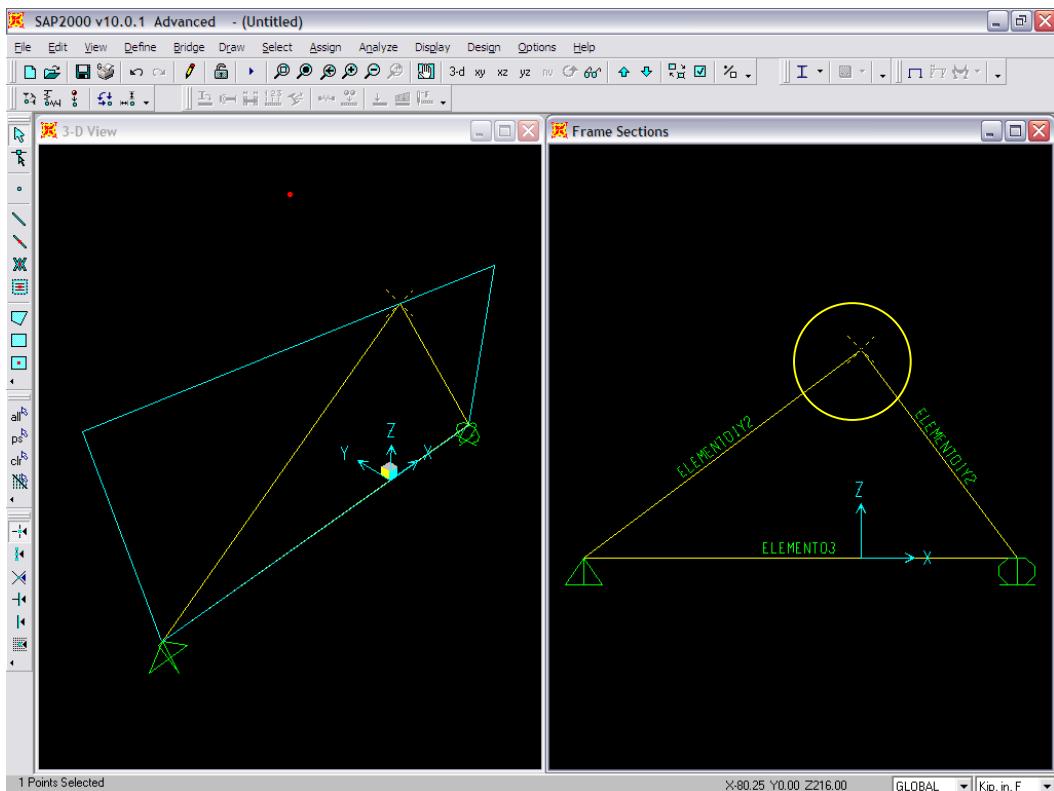


Seleccionar Elemento 3 > Ok

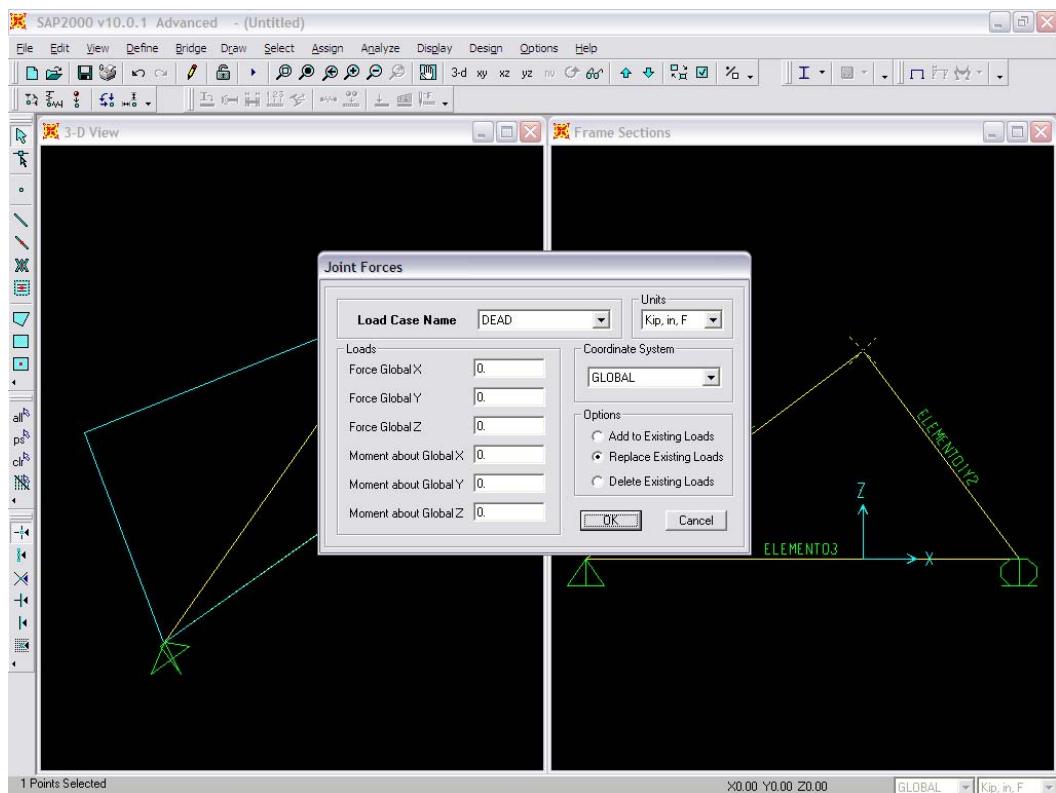
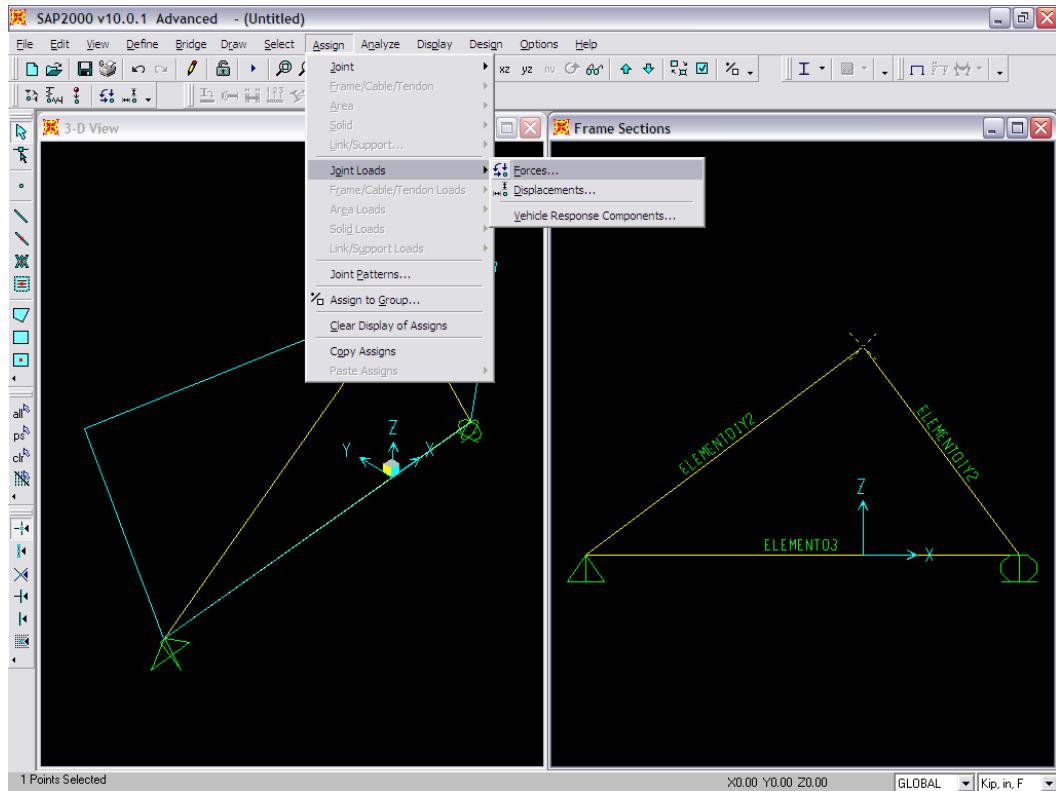


#### 4.3.- Asignar Cargas

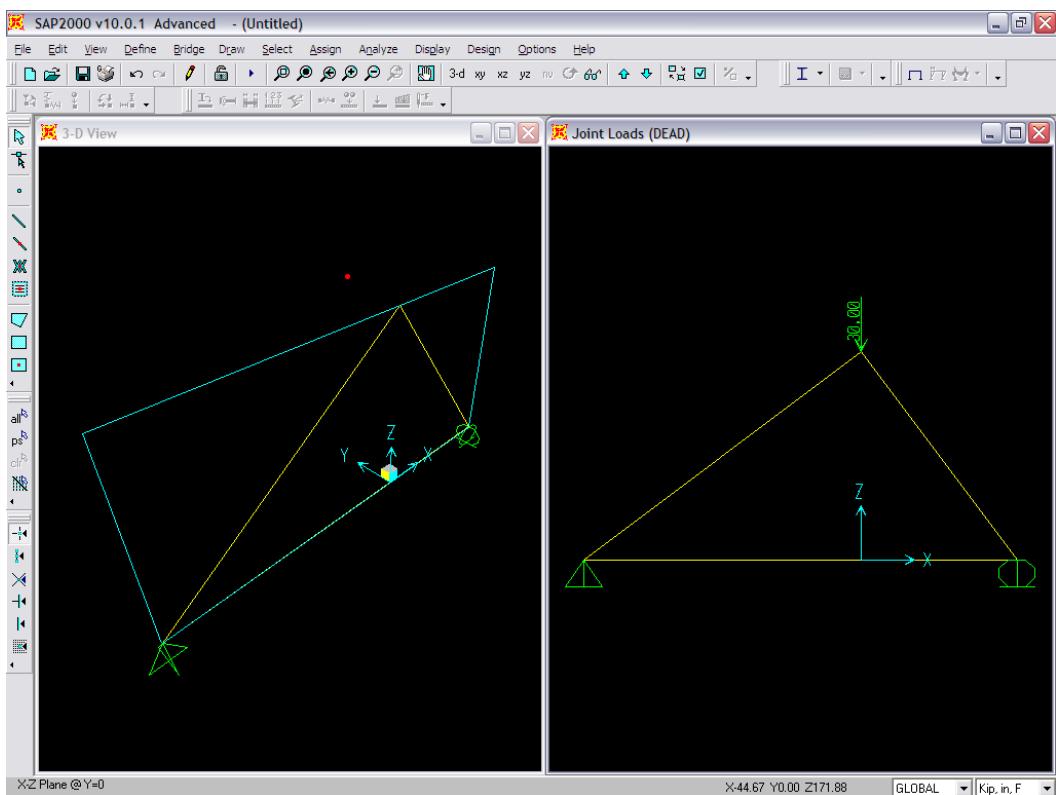
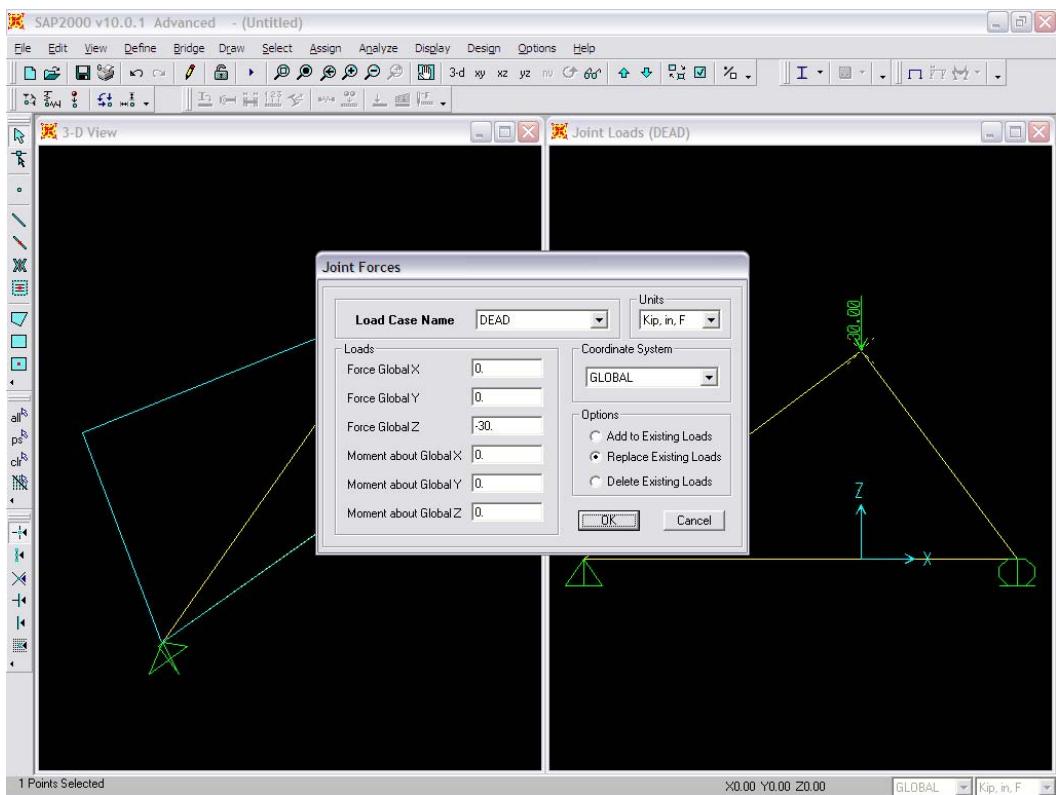
Seleccionar la articulación donde será aplicada la carga



Assign > Joint Loads > Forces

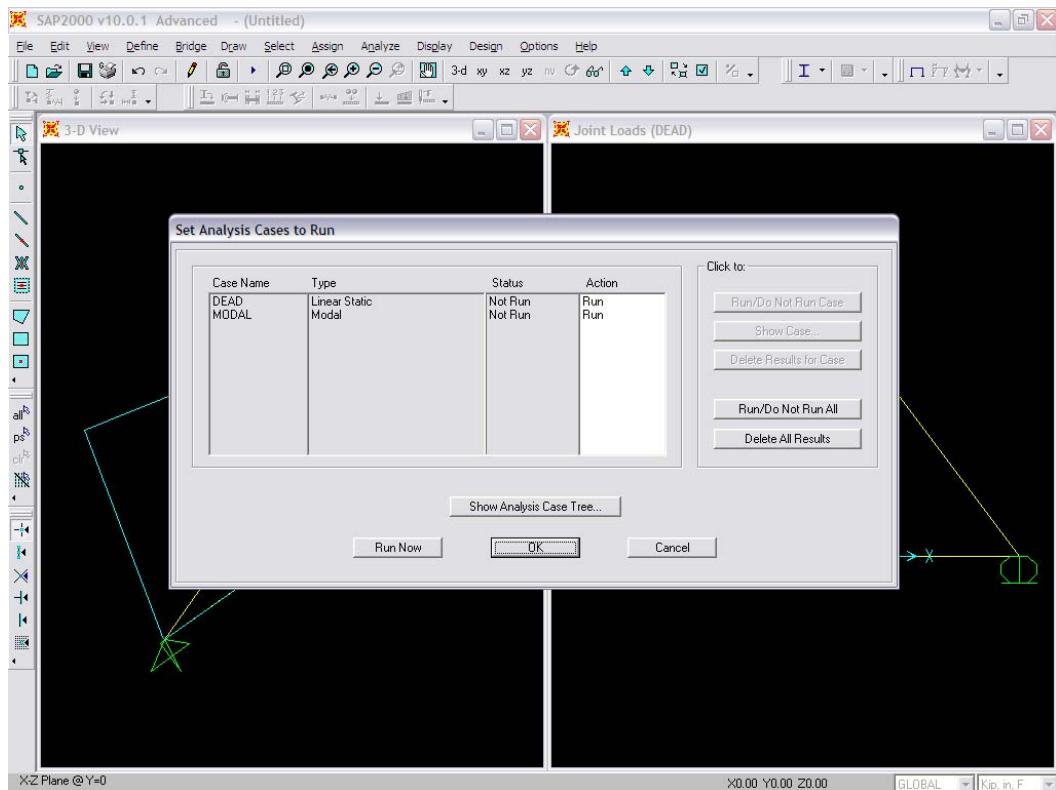
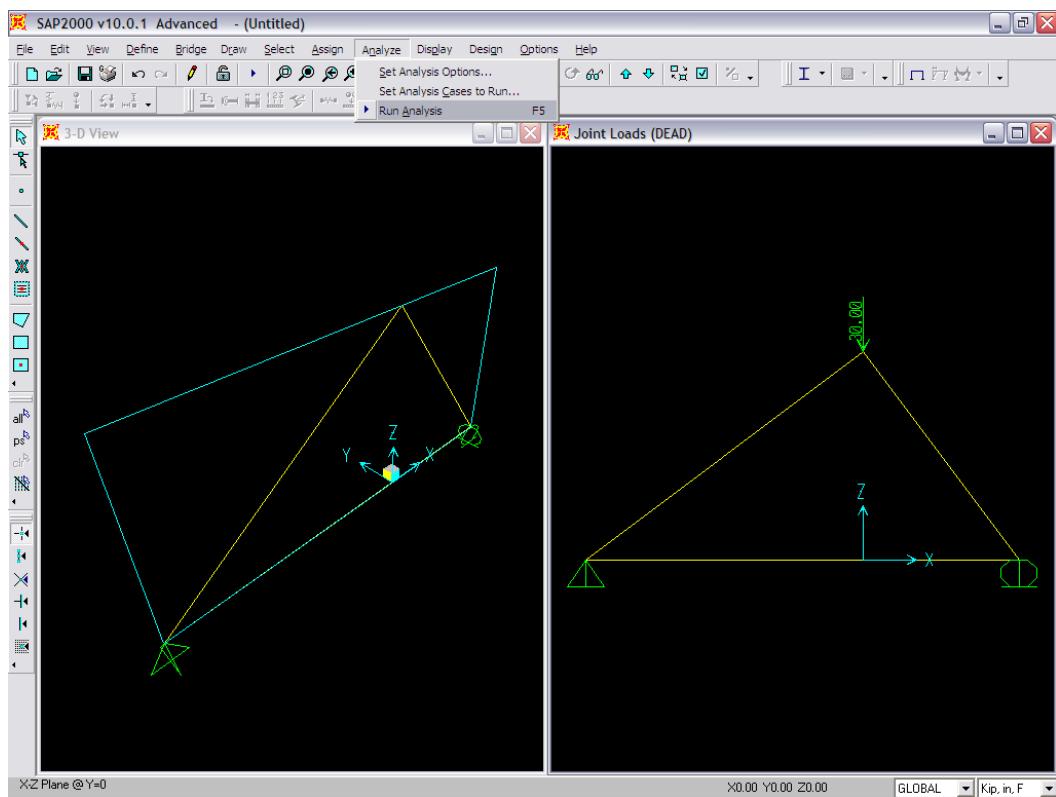


Force Global Z > -30 > Ok [fuerza en el eje Z global]

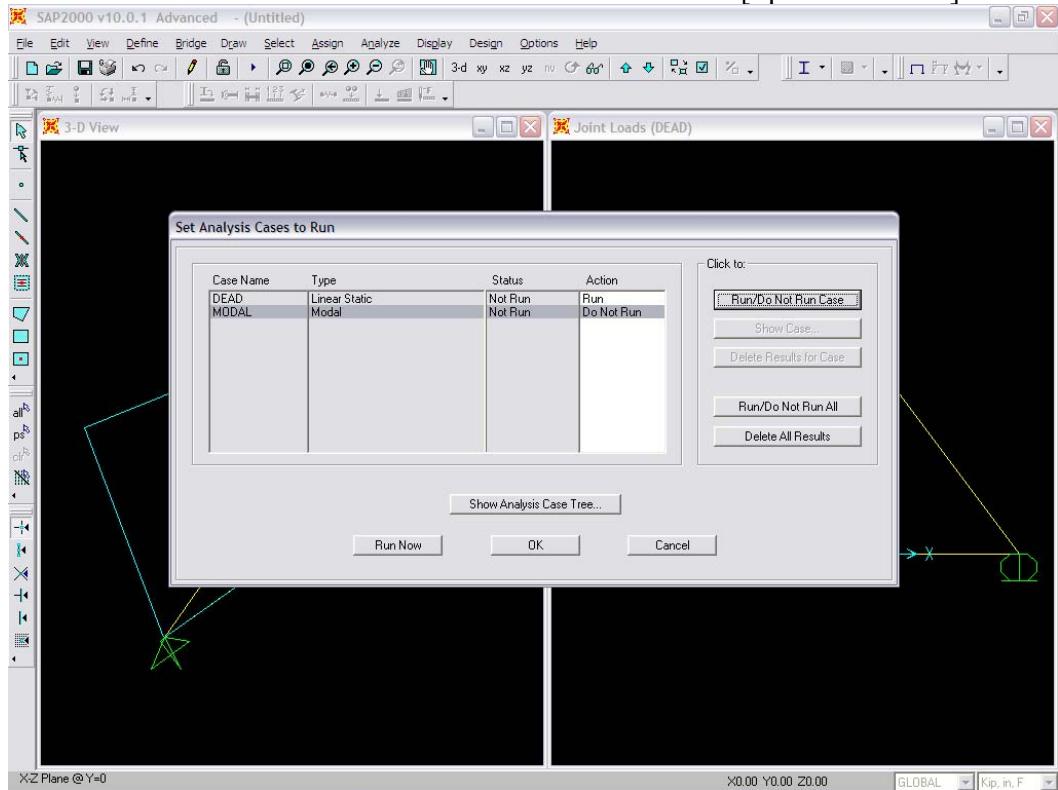


## 5.- ANALIZAR [EJECUTAR] EL PROGRAMA

Analize > Run Analysis



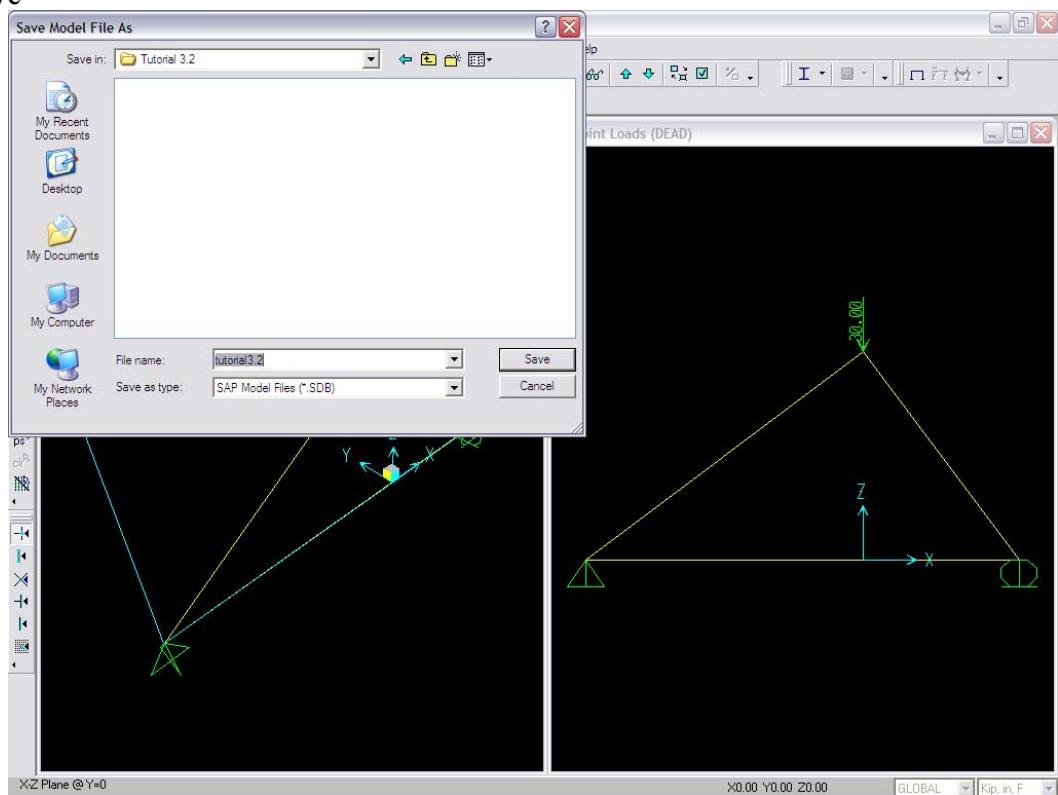
Case Name > Modal > Click > Run/Do Not Run Case > Click [tipos de análisis]

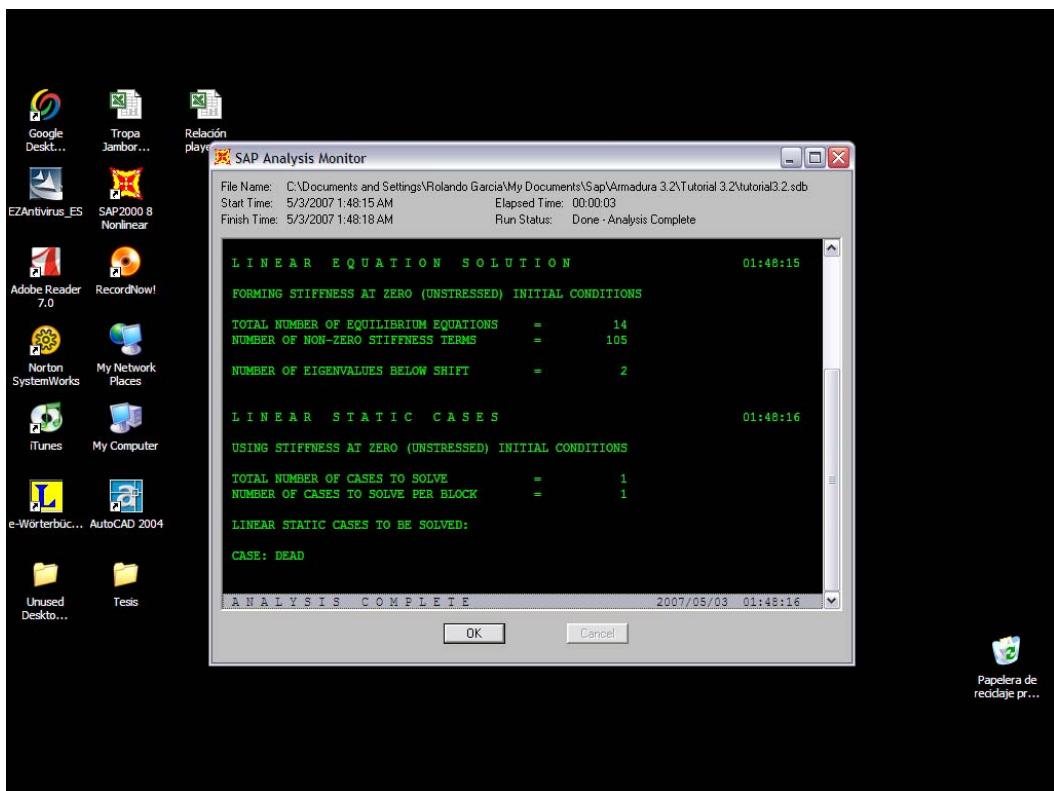


Run Now > Click

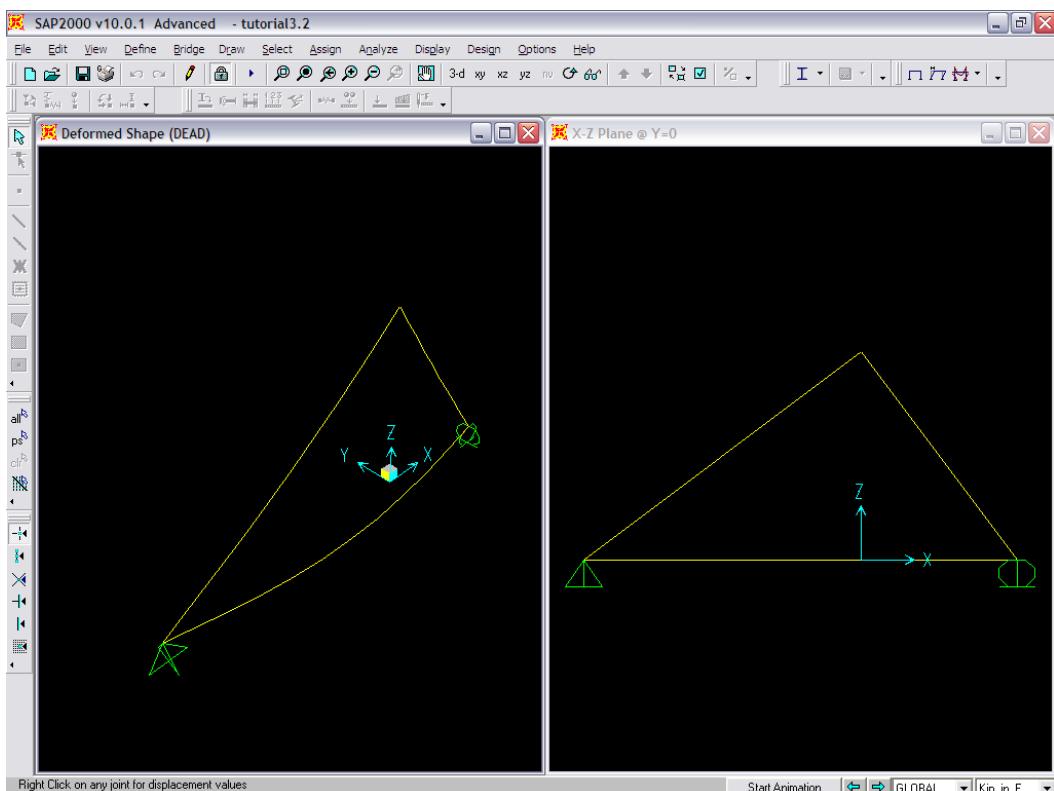
Save Model File As [crear un folder, poner nombre y guardarlo ahí]

Save



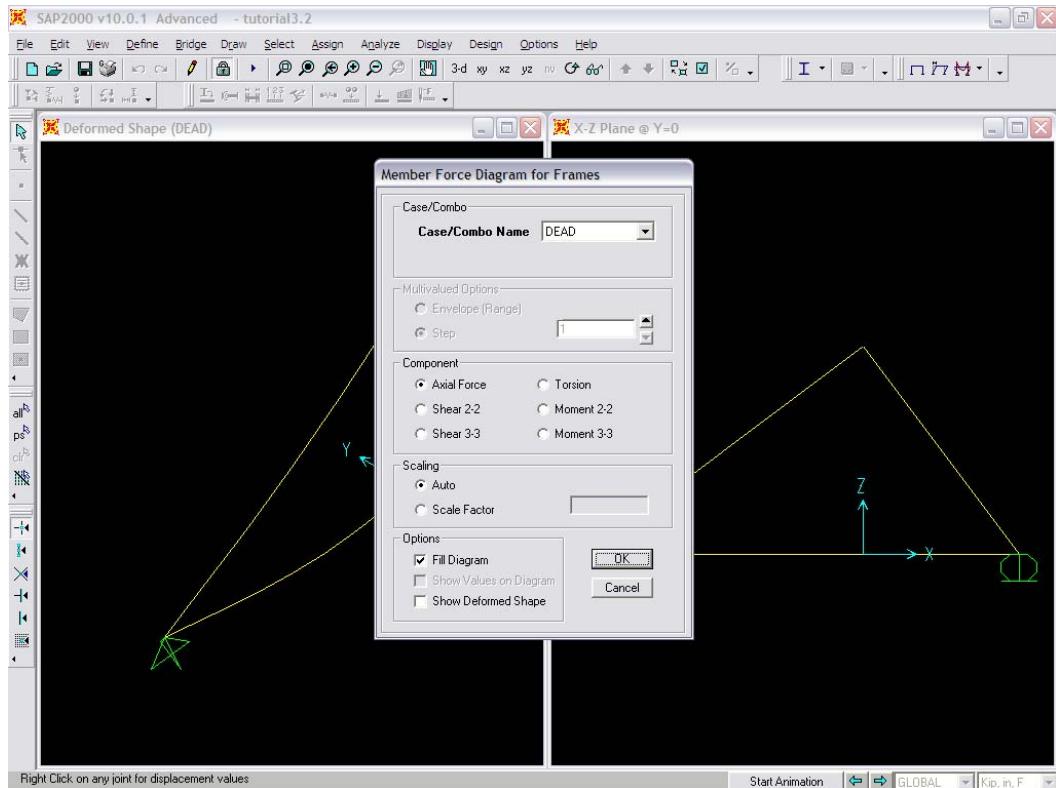
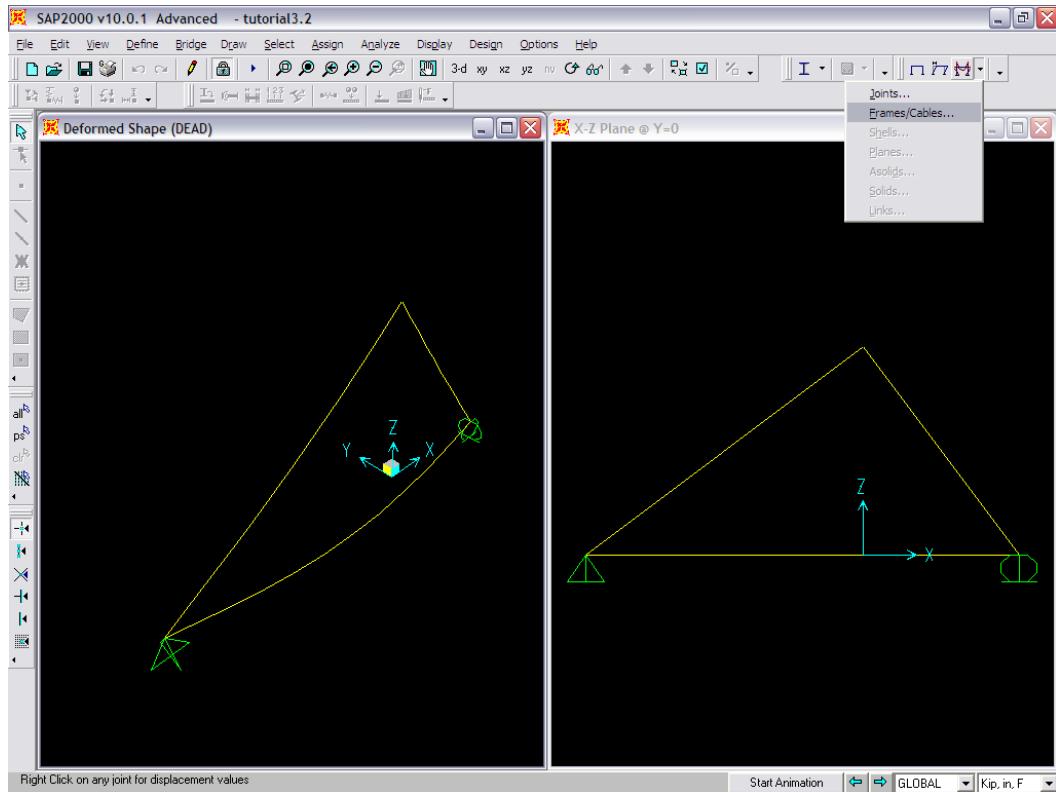


Ok > Aparece inmediatamente



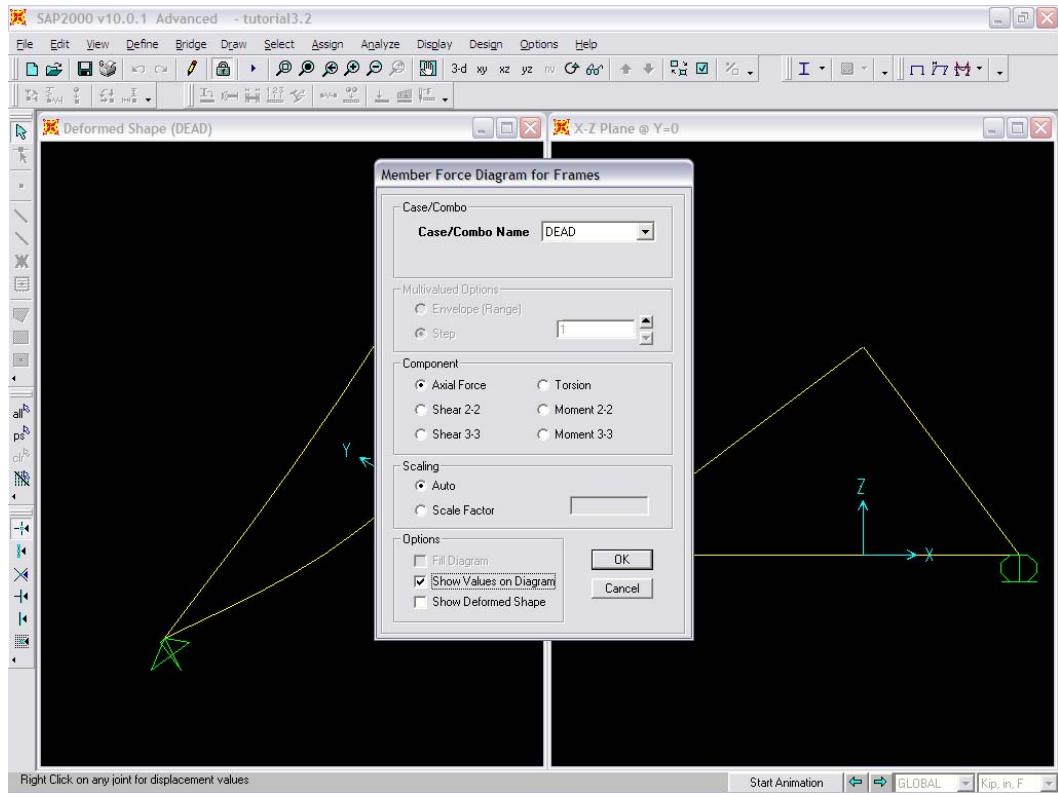
## 6.- REVISAR LOS RESULTADOS

Show Forces/Stresses > Frames/Cables

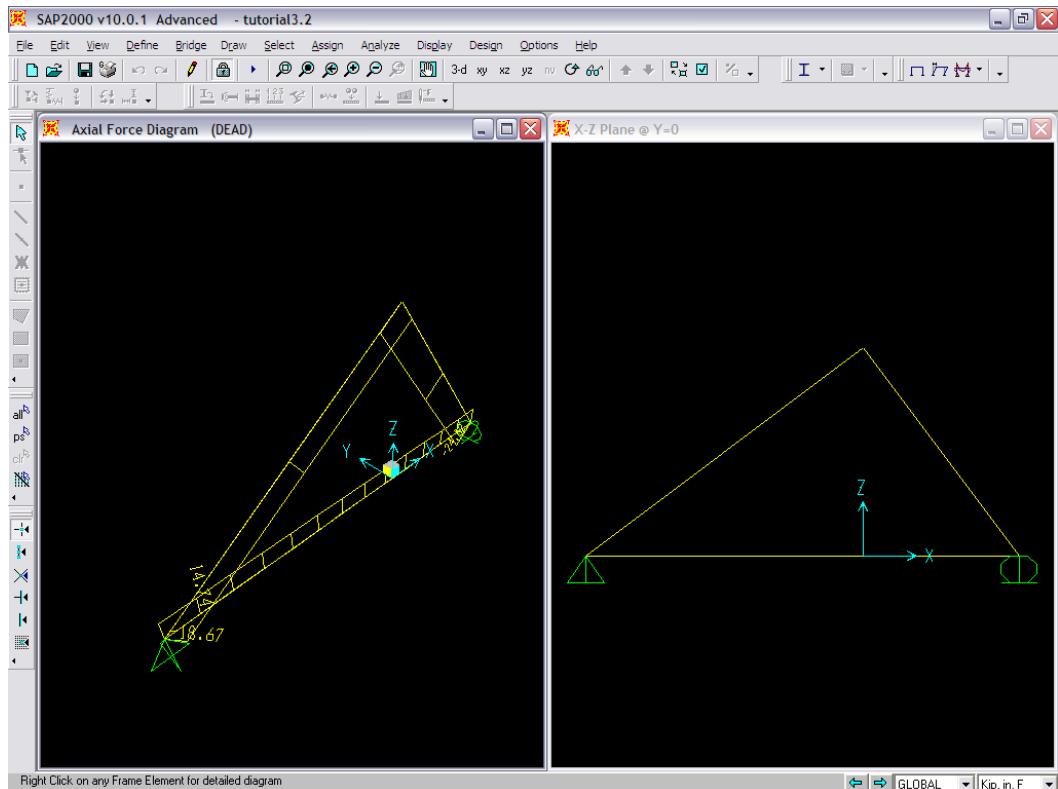


Component > Axial Force [fuerza axial]

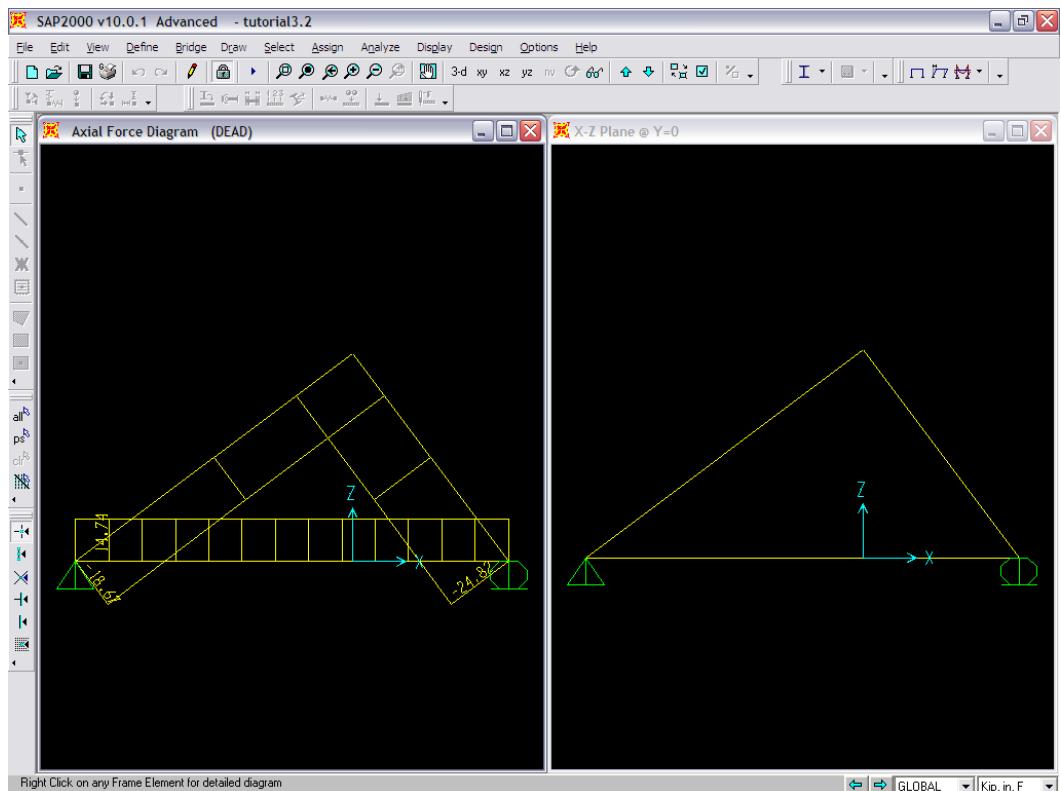
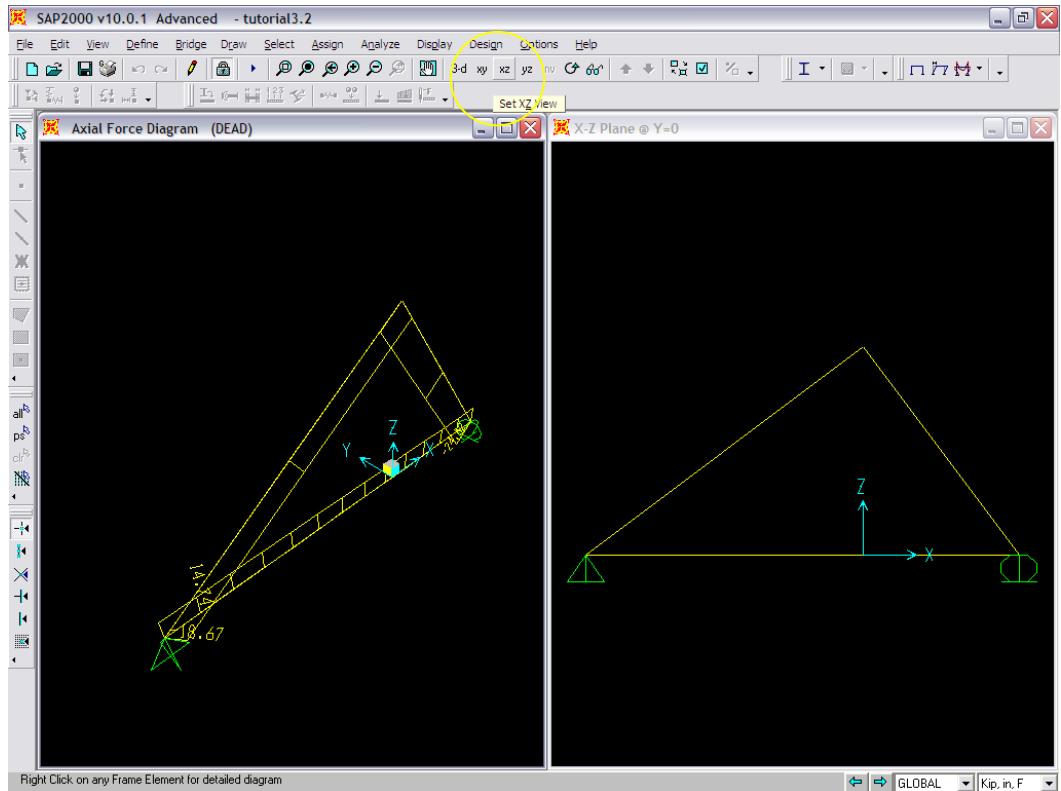
Options > Show Values on Diagram [mostrar valores en el diagrama]



Ok



Los resultados aparecen en la ventana izquierda en la vista 3d, para observarlos mejor cambiaremos a la vista xz dando clic.



Como podemos observar los resultados son iguales o muy parecidos a los realizados manualmente.

Manualmente

18.0 kips  
24.0 kips  
14.40 kips

En el Sap

18.67 kips  
24.82 kips  
14.74 kips

### 3.2 ELEMENTO FINITO VIGA

El elemento finito viga tiene eje recto con dos nodos y longitud  $L$ , existen dos grados de libertad por nodo: los desplazamientos y giros nodales.

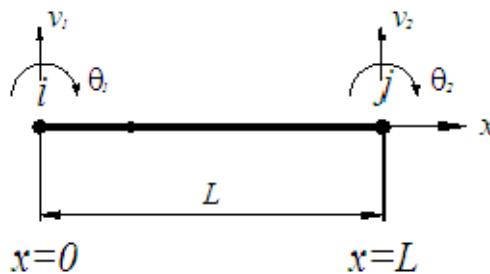


Fig. 3.9 Desplazamientos y giros nodales.

Considerando que  $v_i$  es el desplazamiento en el nodo “i” normal al eje longitudinal de la barra en el sentido y;  $\theta_i$  es el giro del eje longitudinal de la barra en el nodo “i”. Definido como:

$$\theta = EI \frac{dv}{dx} \quad (3.45)$$

por definición:

$$\text{Memento: } M_z = (-) EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.46)$$

$$\text{Cortante: } V = (-) EI \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (3.47)$$

$$\text{Carga: } P = EI \frac{d^4 v}{dx^4} \quad (3.48)$$

$$\text{Para un elemento sin carga: } \frac{P}{EI} = \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (3.49)$$

Así, la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de una viga a flexión es:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (3.50)$$

Se propone como solución a la ecuación diferencial, cuya incógnita es el desplazamiento, un polinomio cúbico, tal que:

$$v^* = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (3.51)$$

derivando,

$$\frac{dv^*}{dx} = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (3.52)$$

se calcula la derivada del desplazamiento ya que ésta relaciona a  $v$  con la otra incógnita nodal:  $\theta = \frac{dv^*}{dx}$ .

En las ecuaciones (3.51) y (3.52), las incógnitas son  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  (4 incógnitas) por lo que se necesitan dos ecuaciones más para determinarlas; los valores de  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$  se obtienen de las condiciones de frontera, ya que al sustituir dos ecuaciones en dos nodos, tendremos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

Evaluando (3.51) en las condiciones de frontera,

en  $x = 0 \quad v^* = a_1$

$x = L \quad v^* = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3$

y evaluando (3.52) en las condiciones de frontera,

$x = 0 \quad \frac{dv^*}{dx} = a_2$

$x = L \quad \frac{dv^*}{dx} = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2$

Además en los apoyos los desplazamientos deben ser igual a:

$x = 0 \quad v^* = v_1$

$x = L \quad v^* = v_2$

y el giro nodal a:

$x = 0 \quad \frac{dv^*}{dx} = \theta_1$

$x = L \quad \frac{dv^*}{dx} = \theta_2$

Igualando ambas condiciones tenemos:

$$v_1 = a_1$$

$$v_2 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3$$

$$\theta_1 = a_2$$

$$\theta_2 = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

donde  $v_1, \theta_1, v_2$  y  $\theta_2$  son los grados de libertad en los nodos. Resolviendo para las incógnitas.

$$a_1 = v_1 \quad (3.53)$$

$$a_2 = \theta_1 \quad (3.54)$$

Sustituyendo en:

$$v_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

tenemos,

$$v_2 = v_1 + \theta_1 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \quad (3.55)$$

Sustituyendo en:

$$\theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

tenemos,

$$\theta_2 = \theta_1 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 \quad (3.56)$$

Ordenando (3.55) y (3.56),

$$v_2 - v_1 - \theta_1 L = a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

Multiplicando la primera por  $-\frac{2}{L}$  y sumando término a término con la segunda,

$$-\frac{2}{L} [v_2 - v_1 - \theta_1 L] = -2a_3 L - 2a_4 L^2$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

La suma es:

$$-\frac{2}{L} [v_2 - v_1 - \theta_1 L] + \theta_2 - \theta_1 = a_4 L^2$$

Despejando  $a_4$ :

$$a_4 = -\frac{2}{L^3} [v_2 - v_1 - \theta_1 L] + \frac{\theta_2}{L^2} - \frac{\theta_1}{L^2}$$

$$a_4 = -\frac{2v_2}{L^3} + \frac{2v_1}{L^3} + \frac{2\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} - \frac{\theta_1}{L^2}$$

Finalmente,

$$a_4 = -\frac{2v_2}{L^3} + \frac{2v_1}{L^3} + \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} \quad (3.57)$$

Sustituyendo (3.57) en:

$$\theta_2 - \theta_1 = 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

despejando  $a_3$ ,

$$a_3 = \frac{\theta_2}{2L} - \frac{\theta_1}{2L} - \frac{3}{2} a_4 L$$

$$a_3 = \frac{\theta_2}{2L} - \frac{\theta_1}{2L} - \frac{3L}{2} \left[ -\frac{2v_2}{L^3} + \frac{2v_1}{L^3} + \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} \right]$$

$$a_3 = \frac{\theta_2}{2L} - \frac{\theta_1}{2L} + \frac{3v_2}{L^2} - \frac{3v_1}{L^2} - \frac{3\theta_1}{2L} - \frac{3\theta_2}{2L}$$

Finalmente,

$$a_3 = -2 \frac{\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L} - \frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} \quad (3.58)$$

Sustituyendo en la aproximación a la solución los valores de (3.53), (3.54), (3.57) y (3.58), en:

$$v^* = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

tenemos:

$$v^* = v_1 + \theta_1 x + \left[ -\frac{2\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L} - \frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} \right] x^2 + \left[ \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} + \frac{2v_1}{L^3} - \frac{2v_2}{L^3} \right] x^3$$

Tomando términos comunes:

$$v^* = v_1 \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] + \theta_1 \left[ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] + v_2 \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right] + \theta_2 \left[ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]$$

ó bien:

$$v^* = v_1 N_1 + \theta_1 N_2 + v_2 N_3 + \theta_2 N_4$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_1 &= \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] ; & N_3 &= \left[ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right] \\ N_2 &= \left[ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] ; & N_4 &= \left[ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

Son las funciones de forma o de interpolación, también son conocidas como polinomios de Hermite.

Las funciones de forma o de interpolación tienen las propiedades de valer uno al ser evaluadas en su nodo y valen cero en cualquier otro nodo. Así para el grado de libertad 1,

$$N_1(x=0) = 1$$

$$N_1(x=L) = 0$$

para el grado de libertad 2,

$$\frac{dN_2}{dx} = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$\frac{dN_2}{dx}(x=0) = 1$$

$$\frac{dN_2}{dx}(x=L) = 0$$

para el grado de libertad 3,

$$N_3(x=0) = 0$$

$$N_3(x=L) = 1$$

para el grado de libertad 4,

$$\frac{dN_4}{dx} = -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}$$

$$\frac{dN_4}{dx}(x=0) = 0$$

$$\frac{dN_4}{dx}(x=L) = 1$$

A continuación se muestra la variación de las funciones de forma en el elemento

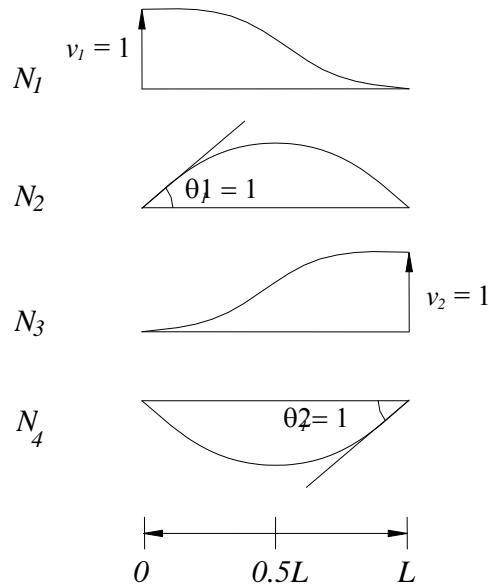


Fig. 3.10 Variación de las funciones de forma en el elemento.

### 3.2.1 MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL, ELEMENTO VIGA

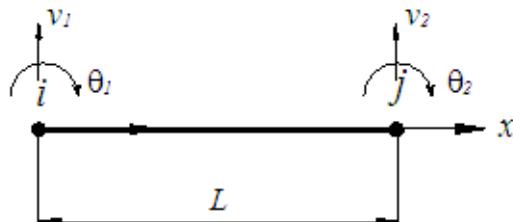


Fig. 3.11 Giros y desplazamientos nodales elemento viga.

La ecuación diferencial que gobierna el comportamiento a flexión del elemento viga es:

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.60)$$

La solución de la ecuación diferencial se evaluará por medio del método de residuos pesados.

- 1) Se propone una aproximación a la solución de la forma:

$$v^* = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_4 = \sum_{i=1}^4 N_i a_i \quad (3.61)$$

2) Sustituyendo la aproximación en a la ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 v^*}{dx^4} = R \quad (3.62)$$

3) Se pesa el error o residuo,

$$\int_{\Omega} R \cdot W_i d\Omega = 0 \quad (3.63)$$

así,

$$\int_0^L \left[ EI \frac{d^4 v^*}{dx^4} \right] \cdot W_i dx = 0 \quad (3.64)$$

Integrando por partes, con:

$$u = W_i \quad dv = \frac{d^4 v^*}{dx^4} dx$$

$$du = \frac{dW_i}{dx} \quad v = \frac{d^3 v^*}{dx^3}$$

Sustituyendo, en (3.64),

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^4 v^*}{dx^4} \right] \cdot W_i dx = EI W_i \frac{d^3 v^*}{dx^3} \Big|_0^L - EI \int_0^L \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] dx = 0 \quad (3.65)$$

Para la segunda integral de (3.65),

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] dx \quad (3.66)$$

integrándola por partes, con:

$$u = \frac{dW_i}{dx} \quad dv = \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] dx$$

$$du = \frac{d^2 W_i}{dx^2} \quad v = \frac{d^2 v^*}{dx^2}$$

Sustituyendo e integrando,

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] dx = EI \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \Big|_0^L - EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right] dx \quad (3.67)$$

Sustituyendo (3.67) en (3.65),

$$EI W_i \frac{d^3 v^*}{dx^3} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \Big|_0^L + EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right] dx = 0 \quad (3.68)$$

Despejando la integral definida,

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2 W_i}{dx^2} \right] dx = EI \left[ \frac{dW_i}{dx} \right] \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \Big|_0^L - EI \left[ W_i \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] \Big|_0^L \quad (3.69)$$

Como:  $v^* = N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2 = \sum_{i=1}^4 N_i a_i$

$$\frac{d^2 v^*}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left[ \sum_{i=1}^4 N_i a_i \right] \quad (3.70)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i a_i \right\} = \frac{d^2}{dx^2} [N_1 v_1 + N_2 \theta_1 + N_3 v_2 + N_4 \theta_2]$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i a_i \right\} = \frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2$$

que se puede escribir,

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i a_i \right\} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Por el Método de Galerkin, las funciones de peso son las funciones de forma,

$$\begin{aligned} W_i &= N_i \\ \frac{dW_i}{dx} &= \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{d^2 W_i}{dx^2} &= \frac{d^2 N_i}{dx^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (3.69),

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_i}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i a_i \right\} \right] dx = EI \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \frac{d}{dx} \{N_i\} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] \{N_i\} \Big|_0^L$$

Sustituyendo (3.71), y variando  $i=1$ ,

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = EI \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \frac{dN_1}{dx} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] N_1 \Big|_0^L$$

para  $i = 2$ ,

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_2}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_3}{dx^2} \quad \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = EI \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \frac{dN_2}{dx} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] N_2 \Big|_0^L$$

para  $i = 3$

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = EI \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \frac{d N_3}{dx} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] N_3 \Big|_0^L$$

para  $i = 4$

$$EI \int_0^L \left[ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right] \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = EI \left[ \frac{d^2 v^*}{dx^2} \right] \frac{d N_4}{dx} \Big|_0^L - EI \left[ \frac{d^3 v^*}{dx^3} \right] N_4 \Big|_0^L$$

Agrupando términos:

$$\int_0^L \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} EI \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} dx = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

que tiene la forma:

$$\int_V [B]^T [D] [B] \{u\} dx = \{P\} \quad (3.73)$$

en donde la matriz de rigidez elemental es:

$$[k^e] = \int_0^L [B]^T [D] [B] dx$$

$$EI \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \\ \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} & \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Simétrica

Las integrales se resuelven analíticamente o numéricamente por medio de la cuadratura de Newton-Cotes.

**EJEMPLO 3.3**

Evaluar el término  $k_{11}$  de la matriz de rigidez elemental (3.74). Se necesita,

$$N_1 = \left[ 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right]$$

y sus derivadas:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$\frac{d^2N_1}{dx^2} = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

Entonces:

$$k_{11} = EI \int_0^L \frac{d^2N_1}{dx^2} \frac{d^2N_1}{dx^2} dx = EI \int_0^L \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right] \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right] dx$$

$$= EI \int_0^L \left[ \frac{36}{L^4} - 2 \left\{ \frac{6}{L^2} \right\} \left\{ \frac{12x}{L^3} \right\} + \left[ \frac{12x}{L^3} \right]^2 \right] dx$$

$$= EI \int_0^L \left[ \frac{36}{L^4} - \frac{144x}{L^5} + \frac{144x^2}{L^6} \right] dx$$

$$= EI \left[ \frac{36}{L^4} x - \frac{72x^2}{L^5} + \frac{48x^3}{L^6} \right]_0^L$$

$$= EI \left[ \frac{36}{L^4} (L) - \frac{72(L)^2}{L^5} + \frac{48(L)^3}{L^6} \right]$$

$$= EI \left[ \frac{36}{L^3} - \frac{72}{L^3} + \frac{48}{L^3} \right]$$

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3}$$

#### EJEMPLO 3.4

Evaluar el término  $k_{12}$  de la matriz de rigidez elemental (3.74).

$$k_{12} = EI \int_0^L \left[ \frac{d^2N_1}{dx^2} \right] \left[ \frac{d^2N_2}{dx^2} \right] dx = EI \int_0^L \left[ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right] \left[ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right] dx$$

$$= EI \int_0^L \left[ \frac{24}{L^3} - \frac{36x}{L^4} - \frac{48x}{L^4} + \frac{72x^2}{L^5} \right] dx$$

$$= EI \left[ \frac{24x}{L^3} - \frac{18x^2}{L^4} - \frac{24x^2}{L^4} + \frac{24x^3}{L^5} \right]_0^L$$

$$= EI \left[ \frac{24x}{L^3} - \frac{42x^2}{L^4} + \frac{24x^3}{L^5} \right]_0^L$$

$$= EI \left[ \frac{24(L)}{L^3} - \frac{42(L)^2}{L^4} + \frac{24(L)^3}{L^5} \right]$$

$$= EI \left[ \frac{24}{L^2} - \frac{42}{L^2} + \frac{24}{L^2} \right]$$

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2}$$

Los demás términos se obtienen de forma similar, finalmente la matriz elemental de rigidez es,

$$[k^e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

### EJEMPLO 3.5

Determinar los elementos mecánicos en la siguiente viga.

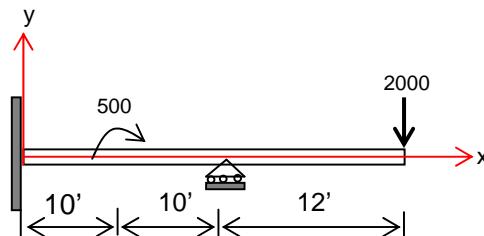


Fig. 3.12 Viga del ejemplo 3.5.

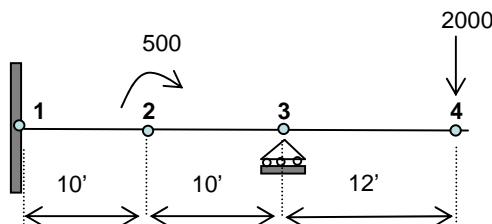


Fig. 3.13 Topología del modelo.

ELEMENTO	CONECTIVIDAD	MÓDULO DE	MOMENTO
----------	--------------	-----------	---------

		ELASTICIDAD	DE INERCIA
1	1-2	E	I
2	2-3	E	I
3	3-4	E	I

Las matrices de rigidez elemental, según (3.75) son:

### ELEMENTO 1

$$[k_1^e] = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ 12 & 60 & -12 & 60 \\ 60 & 400 & -60 & 200 \\ -12 & -60 & 12 & -60 \\ 60 & 200 & -60 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

### ELEMENTO 2

$$[k_2^e] = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ 12 & 60 & -12 & 60 \\ 60 & 400 & -60 & 200 \\ -12 & -60 & 12 & -60 \\ 60 & 200 & -60 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

### ELEMENTO 3

$$[k_3^e] = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} v_3 & \theta_3 & v_4 & \theta_4 \\ 6.94 & 41.7 & -6.94 & 41.7 \\ 41.7 & 333.0 & -41.7 & 167 \\ -6.94 & -41.7 & 6.94 & -41.7 \\ 41.7 & 167 & -41.7 & 333.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez total, referida a un sistema global es,

$$v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3 \quad v_4 \quad \theta_4$$

$$[k_G] = \frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 12 & 60 & -12 & 60 \\ 60 & 400 & -60 & 200 \\ -12 & -60 & 12+12 & -60+60 \\ 60 & 200 & -60+60 & 400+400 \\ & & -12 & -60 \\ & & 60 & 200 \\ & & & -60+41.7 \\ & & & 400+333 \\ & & & -6.94 \\ & & & 41.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Se tiene entonces,

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 60 & -12 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 400 & -60 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -60 & 24 & 0 & -12 & 60 & 0 & 0 \\ 60 & 200 & 0 & 800 & -60 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -60 & 18.9 & -18.3 & -6.94 & 41.7 \\ 0 & 0 & 60 & 200 & -18.3 & 733 & -41.7 & 167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.94 & -41.7 & 6.94 & -41.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41.7 & 167 & -41.7 & 333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Con las siguientes condiciones de frontera, para el empotre,

$$v_1 = 0$$

$$\theta_1 = 0$$

en el apoyo móvil,

$$v_3 = 0$$

Condensando la matriz global, queda,

$$\frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 800 & 200 & 0 & 0 \\ 60 & 200 & 733 & -41.7 & 167 \\ 0 & 0 & -41.7 & 6.94 & -41.7 \\ 0 & 0 & 167 & -41.7 & 333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -500 \\ M_3 \\ -2000 \\ M_4 \end{bmatrix}$$

Ya que,  $M_2 = -500$  y  $V_4 = -2000$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos,

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 304348 \\ 29810 \\ -121739 \\ -2636991 \\ -269166 \end{Bmatrix}$$

y finalmente,

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0.00000 \\ 0.00000 \\ 304348 \\ 29810 \\ 0.0000 \\ -121739 \\ -2636991 \\ -269166 \end{Bmatrix}$$

Para el cálculo de momentos y cortantes, de la relación (3.75):

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

### ELEMENTO 1

$$\frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 12 & 60 & -12 & 60 \\ 60 & 400 & -60 & 200 \\ -12 & -60 & 12 & -60 \\ 60 & 200 & -60 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 304348/EI \\ 29810/EI \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1864 \\ -12299 \\ 1864 \\ -6337 \end{Bmatrix}$$

### ELEMENTO 2

$$\frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 12 & 60 & -12 & 60 \\ 60 & 400 & -60 & 200 \\ -12 & -60 & 12 & -60 \\ 60 & 200 & -60 & 400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 304348/EI \\ 29810/EI \\ 0.00 \\ -121739/EI \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_2 \\ M_2 \\ V_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1864 \\ 5837 \\ 1864 \\ -24473 \end{Bmatrix}$$

**ELEMENTO 3**

$$\frac{EI}{1000} \begin{bmatrix} 6.94 & 41.7 & -6.94 & 41.7 \\ 41.7 & 333.0 & -41.7 & 167 \\ -6.94 & -41.7 & 6.94 & -41.7 \\ 41.7 & 167 & -41.7 & 333.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -121379/EI \\ -2636991/EI \\ -269166/EI \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_3 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} V_3 \\ M_3 \\ V_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 24473 \\ 2000 \\ -166 \end{Bmatrix}$$

Para calcular las reacciones:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 12 & 60 & -12 & 60 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 60 & 400 & -60 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -60 & 24 & 0 & -12 & 60 & 0 & 0 \\ 60 & 200 & 0 & 800 & -60 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -60 & 18.9 & -18.3 & -6.94 & 41.7 \\ 0 & 0 & 60 & 200 & -18.3 & 733 & -41.7 & 167 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.94 & -41.7 & 6.94 & -41.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 41.7 & 167 & -41.7 & 333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 304348 \\ 1 \\ 29810 \\ 0 \\ -121739 \\ -2636991 \\ -269166 \end{Bmatrix} EI = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ 0 \\ -500 \\ R_3 \\ 0 \\ -2000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

de donde:

$$R_1 = -1864$$

$$M_1 = -12299$$

$$R_3 = 3864$$

### 3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN COORDENADAS GLOBALES

Anteriormente se ha encontrado la matriz de rigidez en coordenadas globales para un elemento viga con el eje recto, tal como se mostró en la expresión (3.75).

Se considera que está referida a coordenadas globales ya que los ejes locales y globales coinciden. La matriz de rigidez elemental que considera carga axial, cortante y momento, se obtiene de sumar la matriz de rigidez del elemento armadura y la del elemento viga,

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix} \quad (3.76)$$

donde:  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $u_2$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  son los grados de libertad del elemento referidos a un sistema coordenado local. Para el caso de que el eje de la viga esté inclinado un ángulo,  $\theta$ , con respecto a la horizontal, la matriz de rotación que permite transformar la matriz de rigidez a un sistema global es:

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

que relaciona los grados de libertad en coordenadas locales  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $u_2$ ,  $v_2$  y  $\theta_2$  con los referidos a coordenadas globales:  $u'_1$ ,  $v'_1$ ,  $\theta'_1$ ,  $u'_2$ ,  $v'_2$  y  $\theta'_2$ .

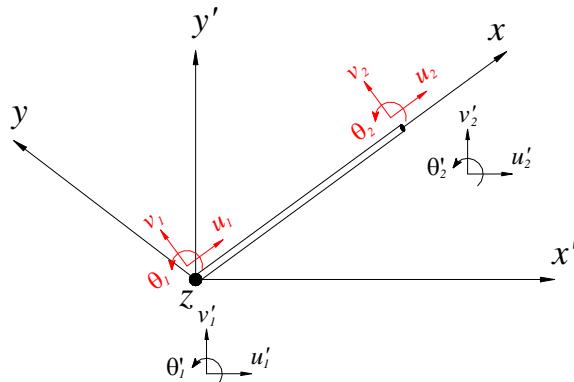


Fig. 3.14 Dirección positiva de los ejes locales x-y; y los globales  $x' - y'$ .

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{c} & \textcolor{red}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{s} & -\textcolor{red}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{c} & \textcolor{red}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\textcolor{red}{s} & \textcolor{red}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.78)$$

De tal manera que la matriz de rigidez elemental referida a coordenadas globales está definida por:

$$[k_G^e] = [T]^T [k^e] [T]$$

es decir:

$$[k_G^e] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{c^2e+s^2f} & \textcolor{red}{cs(e-f)} & -sg & -c^2e-s^2f & \textcolor{red}{cs(f-e)} & -sg \\ \textcolor{red}{cs(e-f)} & \textcolor{red}{s^2e+c^2f} & cg & \textcolor{red}{cs(f-e)} & -s^2e-c^2f & cg \\ -sg & cg & h & sg & -cg & \frac{h}{2} \\ -c^2e-s^2f & \textcolor{red}{cs(f-e)} & sg & \textcolor{red}{c^2e+s^2f} & \textcolor{red}{cs(e-f)} & sg \\ \textcolor{red}{cs(f-e)} & -s^2e-c^2f & -cg & \textcolor{red}{cs(e-f)} & \textcolor{red}{s^2e+c^2f} & -cg \\ -sg & cg & \frac{h}{2} & sg & -cg & h \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

donde:

$$e = \frac{EA}{L}, \quad f = \frac{12EI}{L^3}, \quad g = \frac{6EI}{L^2}, \quad h = \frac{4EI}{L} \quad \text{y} \quad s = \text{sen}\theta; \quad c = \cos\theta.$$

Las fuerzas internas en la barra en coordenadas locales se determina con:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{\theta 1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

ó bien, una vez conocidos los grados de libertad en coordenadas globales,

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{\theta 1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{\theta 2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ s & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Si existe una carga uniformemente distribuida en el miembro, como la de la figura (3.16), el vector de cargas nodales es:



Fig. 3.15 Sentido positivo de los ejes locales.

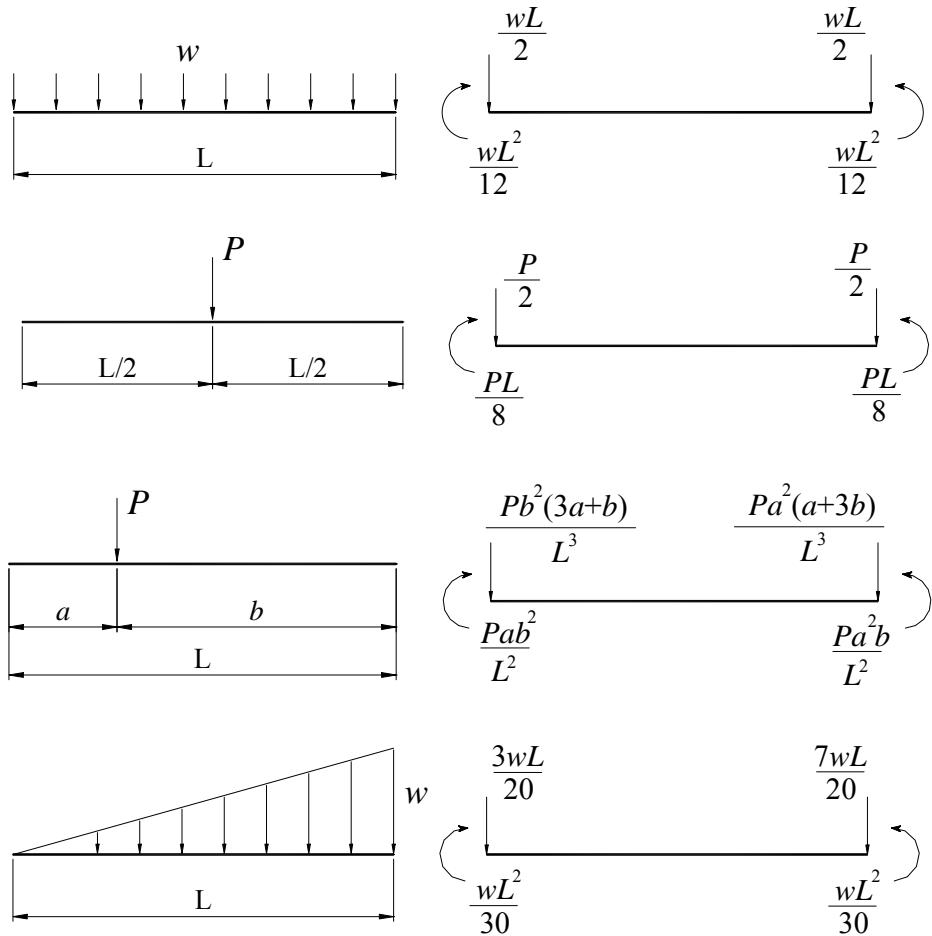


Fig. 3.16 Cargas nodales equivalentes.

$$\{F^e\} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{wL}{2} & -\frac{wL^2}{12} & 0 & -\frac{wL}{2} & \frac{wL^2}{12} \end{bmatrix}^T$$

El vector de cargas referido a un sistema global es:

$$[F_G^e] = [T]^T \{F^e\}$$

Los valores de  $[F_G^e]$  se agregan al vector de carga global; las cargas concentradas y los momentos concentrados se agregan al vector de carga nodal.

Al agrupar las cargas y las rigideces, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$[F_G] = [K_G] \{U_G\} \quad (3.82)$$

### EJEMPLO 3.6

Determinar los desplazamientos y rotaciones de los nodos del marco mostrado en la figura (3.17), considerando los siguientes datos:

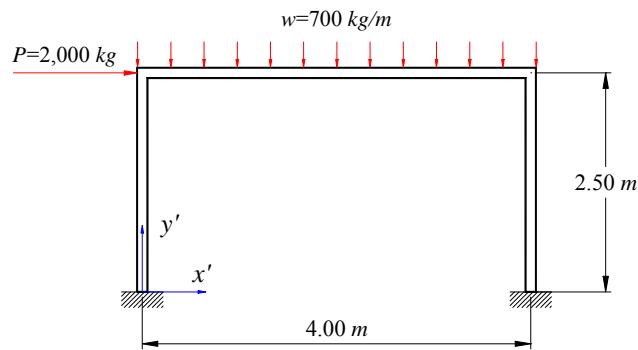


Fig. 3.17 Marco del ejemplo 3.6.

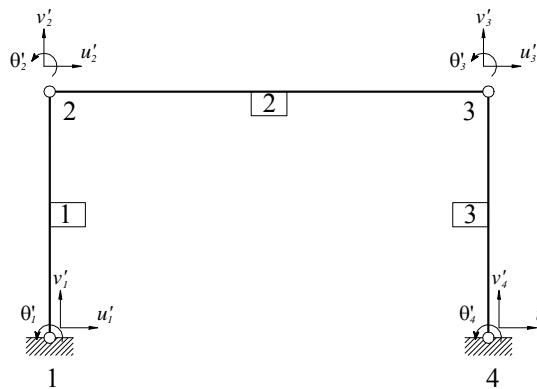


Fig. 3.18 Topología del marco del ejemplo 3.6.



Fig. 3.19 Cargas nodales equivalentes en el elemento 2.

Datos:

Concreto clase 1, (NTC-RCDF2004) con un  $f_c' = 250 \frac{kg}{cm^2}$ , por lo que

$$E = 14000\sqrt{250} = 221359 \frac{kg}{cm^2} = 221.359 \frac{t}{cm^2}.$$

Columnas de 50x50 cm, trabe de 30x40 cm.

Elemento	A (cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	L (cm)
1	2500	520834	250
2	1200	160000	400
3	2500	520834	250

Conectividades:

Elemento	nodo	
	i	j
1	1	2
2	2	3
3	4	3

Constantes:

Elemento	$e = \frac{EA}{L}$	$f = \frac{12EI}{L^3}$	$g = \frac{6EI}{L^2}$	$h = \frac{4EI}{L}$	$c = \cos \theta$	$s = \sin \theta$
1	2214.0	88.54	11068	1844661	0.0	1.0
2	664.0	6.64	1328.15	354174	1.0	0.0
3	2214.0	88.54	11068	1844661	0.0	1.0

Matriz de rigidez elemental:

### ELEMENTO 1

$$[k_1^e] = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 & \dot{v}_1 & \dot{\theta}_1 & \dot{u}_2 & \dot{v}_2 & \dot{\theta}_2 \\ 88.54 & 0 & -11068 & -88.54 & 0 & -11068 \\ 0 & 2214 & 0 & 0 & -2214 & 0 \\ -11068 & 0 & 1844661 & 11068 & 0 & 922330.5 \\ -88.54 & 0 & 11068 & 88.54 & 0 & 11068 \\ 0 & -2214 & 0 & 0 & 2214 & 0 \\ -11068 & 0 & 922330.5 & 11068 & 0 & 1844661 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

### ELEMENTO 2

$$[k_2^e] = \begin{bmatrix} \dot{u}_2 & \dot{v}_2 & \dot{\theta}_2 & \dot{u}_3 & \dot{v}_3 & \dot{\theta}_3 \\ 664 & 0 & 0 & -664 & 0 & 0 \\ 0 & 6.64 & 1328.15 & 0 & -6.64 & 1328.15 \\ 0 & 1328.15 & 354174 & 0 & -1328.15 & 177087 \\ -664 & 0 & 0 & 664 & 0 & 0 \\ 0 & -6.64 & -1328.15 & 0 & 6.64 & -1328.15 \\ 0 & 1328.15 & 177087 & 0 & -1328.15 & 354174 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

### ELEMENTO 3

$$[k_3^e] = \begin{bmatrix} \dot{u}_4 & \dot{v}_4 & \dot{\theta}_4 & \dot{u}_3 & \dot{v}_3 & \dot{\theta}_3 \\ 88.54 & 0 & -11068 & -88.54 & 0 & -11068 \\ 0 & 2214 & 0 & 0 & -2214 & 0 \\ -11068 & 0 & 1844661 & 11068 & 0 & 922330.5 \\ -88.54 & 0 & 11068 & 88.54 & 0 & 11068 \\ 0 & -2214 & 0 & 0 & 2214 & 0 \\ -11068 & 0 & 922330.5 & 11068 & 0 & 1844661 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_4 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global:

$$[k_G] = \begin{bmatrix} u_1' & v_1' & \theta_1' & u_2' & v_2' & \theta_2' & u_3' & v_3' & \theta_3' & u_4' & v_4' \\ \theta_4' & 88.54 & 0 & -11068 & -88.54 & 0 & -11068 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2214 & 0 & 0 & -2214 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -11068 & 0 & 1844661 & 11068 & 0 & 9223305 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -88.54 & 0 & 11068 & 75254 & 0 & 11068 & -664 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -2214 & 0 & 0 & 222064 & 132815 & 0 & -6.64 & 132815 & 0 \\ & -11068 & 0 & 9223305 & 11068 & 132815 & 2198835 & 0 & -132815 & 177087 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -664 & 0 & 0 & 75254 & 0 & 11068 & -88.54 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.64 & -132815 & 0 & 222064 & -132815 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 132815 & 177087 & 11068 & -132815 & 2198835 & -11068 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88.54 & 0 & -11068 & 88.54 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2214 & 0 & 0 & 2214 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11068 & 0 & 9223305 & -11068 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1844661 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ \theta_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ \theta_2' \\ u_3' \\ v_3' \\ \theta_3' \\ u_4' \\ v_4' \\ \theta_4' \end{bmatrix}$$

La matriz global de rigideces condensada, considerando las restricciones de los apoyos es:

$$[k_G] = \begin{bmatrix} u_2' & v_2' & \theta_2' & u_3' & v_3' & \theta_3' \\ 752.54 & 0 & 11068 & -664 & 0 & 0 \\ 0 & 2220.64 & 1328.15 & 0 & -6.64 & 1328.15 \\ 11068 & 1328.15 & 2198835 & 0 & -1328.15 & 177087 \\ -664 & 0 & 0 & 752.54 & 0 & 11068 \\ 0 & -6.64 & -1328.15 & 0 & 2220.64 & -1328.15 \\ 0 & 1328.15 & 177087 & 11068 & -1328.15 & 2198835 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2' \\ v_2' \\ \theta_2' \\ u_3' \\ v_3' \\ \theta_3' \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales a resolver es:

$$[k_G] \{U_G\} = [F_G]$$

donde:

$$\{F_2^e\} = [2 \ -1.4 \ -93.33 \ 0 \ -1.4 \ 93.33]^T$$

las fuerzas en t y momentos en t-cm.

$$\begin{bmatrix} 752.54 & 0 & 11068 & -664 & 0 & 0 \\ 0 & 2220.64 & 1328.15 & 0 & -6.64 & 1328.15 \\ 11068 & 1328.15 & 2198835 & 0 & -1328.15 & 177087 \\ -664 & 0 & 0 & 752.54 & 0 & 11068 \\ 0 & -6.64 & -1328.15 & 0 & 2220.64 & -1328.15 \\ 0 & 1328.15 & 177087 & 11068 & -1328.15 & 2198835 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2' \\ v_2' \\ \theta_2' \\ u_3' \\ v_3' \\ \theta_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ -1.4 \\ -93.33 \\ 0 \\ -1.4 \\ 93.33 \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen los valores nodales:

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0282 \\ -0.0004 \\ -0.0001 \\ 0.0259 \\ -0.0007 \\ -0.0000 \end{Bmatrix}$$

donde los desplazamientos están en cm y los giros en radianes.

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc|c} 88.54 & 0 & -11068 & -88.54 & 0 & -11068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2214 & 0 & 0 & -2214 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11068 & 0 & 1844661 & 11068 & 0 & 9223305 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -88.54 & 0 & 11068 & 75254 & 0 & 11068 & -664 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0282 \\ 0 & -2214 & 0 & 0 & 222064 & 132815 & 0 & -6.64 & 132815 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0004 \\ -11068 & 0 & 9223305 & 11068 & 132815 & 2198835 & 0 & -132815 & 177087 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & -664 & 0 & 0 & 75254 & 0 & 11068 & -88.54 & 0 & 11068 & 0 & 0.0259 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.64 & -132815 & 0 & 222064 & -132815 & 0 & -2214 & 0 & 0 & -0.0007 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 132815 & 177087 & 11068 & -132815 & 2198835 & -11068 & 0 & 9223305 & 0 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88.54 & 0 & -11068 & 88.54 & 0 & -11068 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2214 & 0 & 0 & 2214 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11068 & 0 & 9223305 & -11068 & 0 & 1844661 & 0 & 0 \end{array} \right] =$$

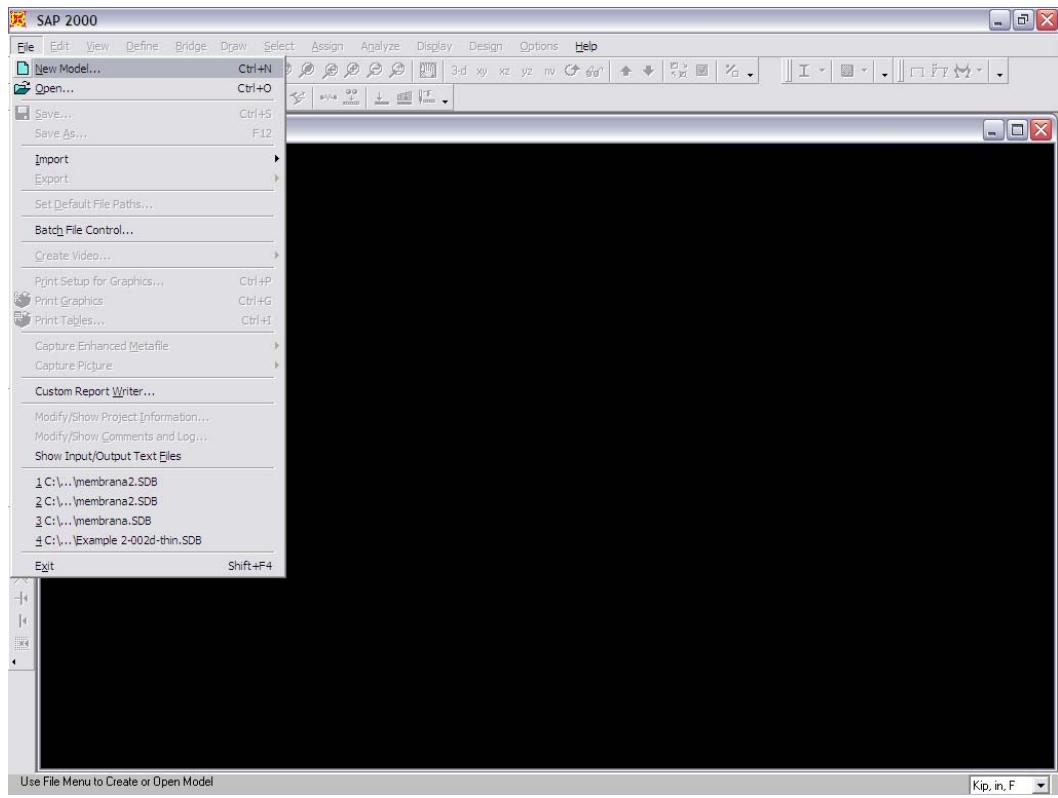
$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ M_1 \\ 2 \\ -1.4 \\ -93.33 \\ 0 \\ -1.4 \\ 93.33 \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ M_4 \end{bmatrix}$$

A continuación se explica paso a paso como realizar el ejemplo del marco en el programa SAP 2000 V.10.

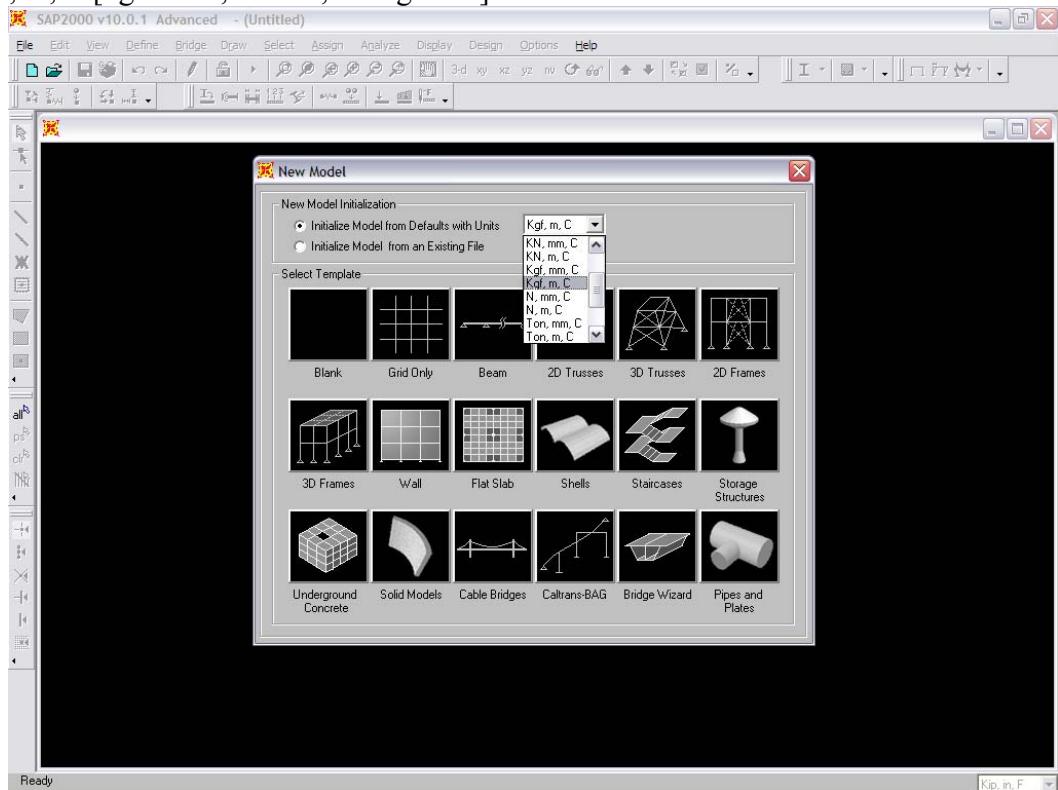
#### MARCO DEL EJEMPLO 3.6 [P.112.]

##### 1.- CREACIÓN DE UN ARCHIVO NUEVO

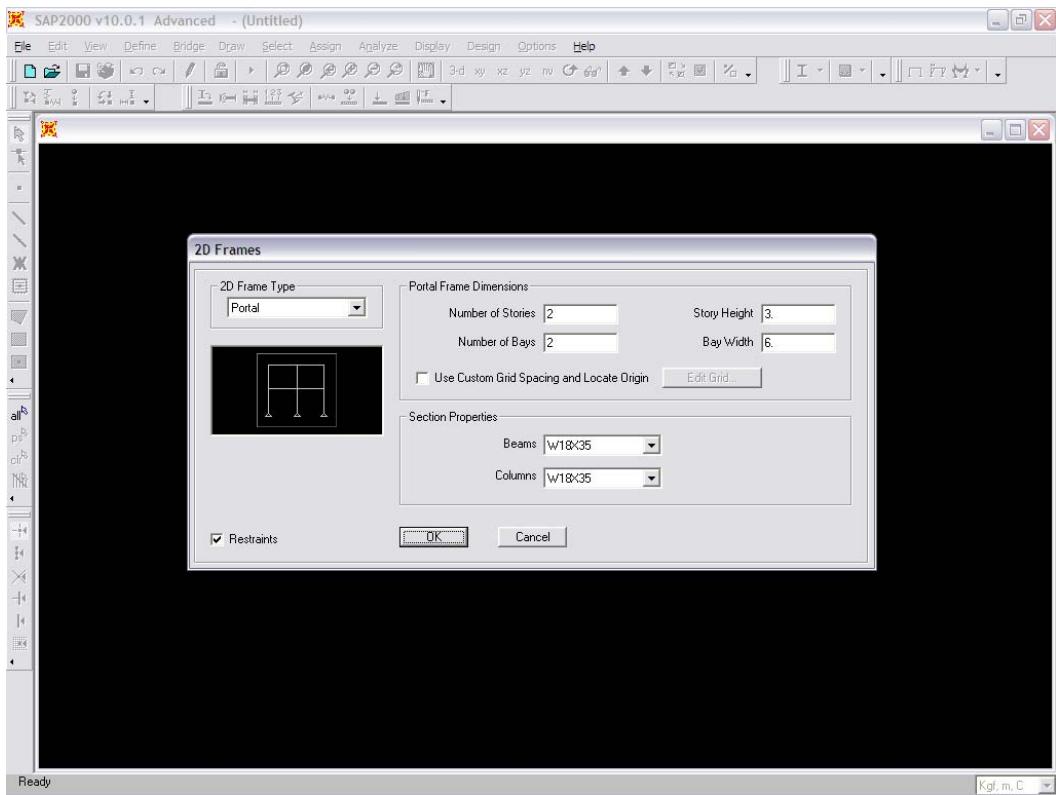
File > New Model



Initialize Model from Defaults with Units [seleccionar unidades]  
Kgf, m, C [kg fuerza, metros, centígrados]



Dar clic en 2D Frames [marcos]

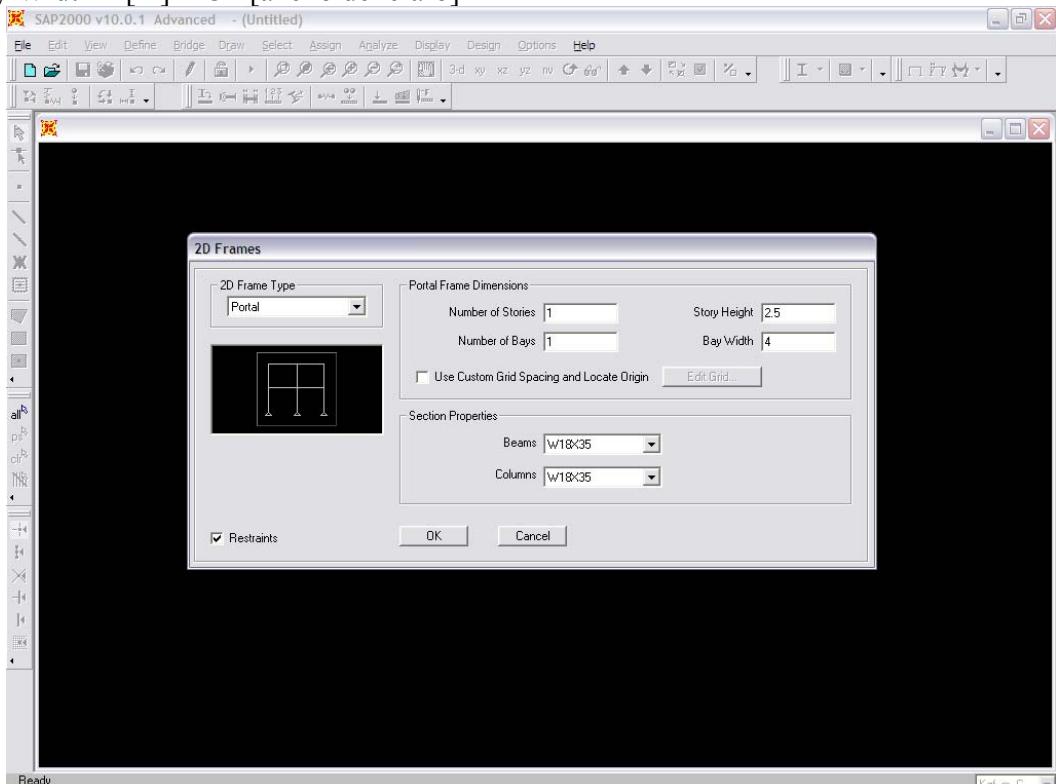


Number of Stories 1 [entrepisos]

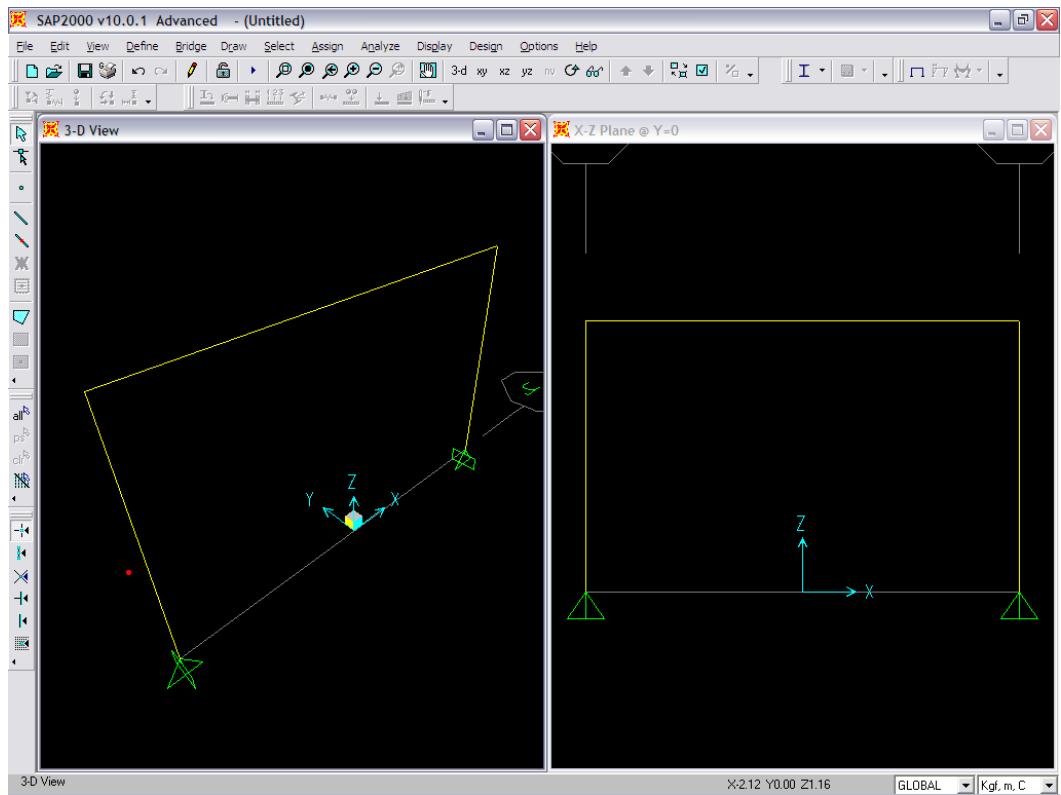
Number of Bays 1 [claros]

Story Height 2.5 [m] [altura de entepiso]

Bay Width 4 [m] > Ok [ancho del claro]

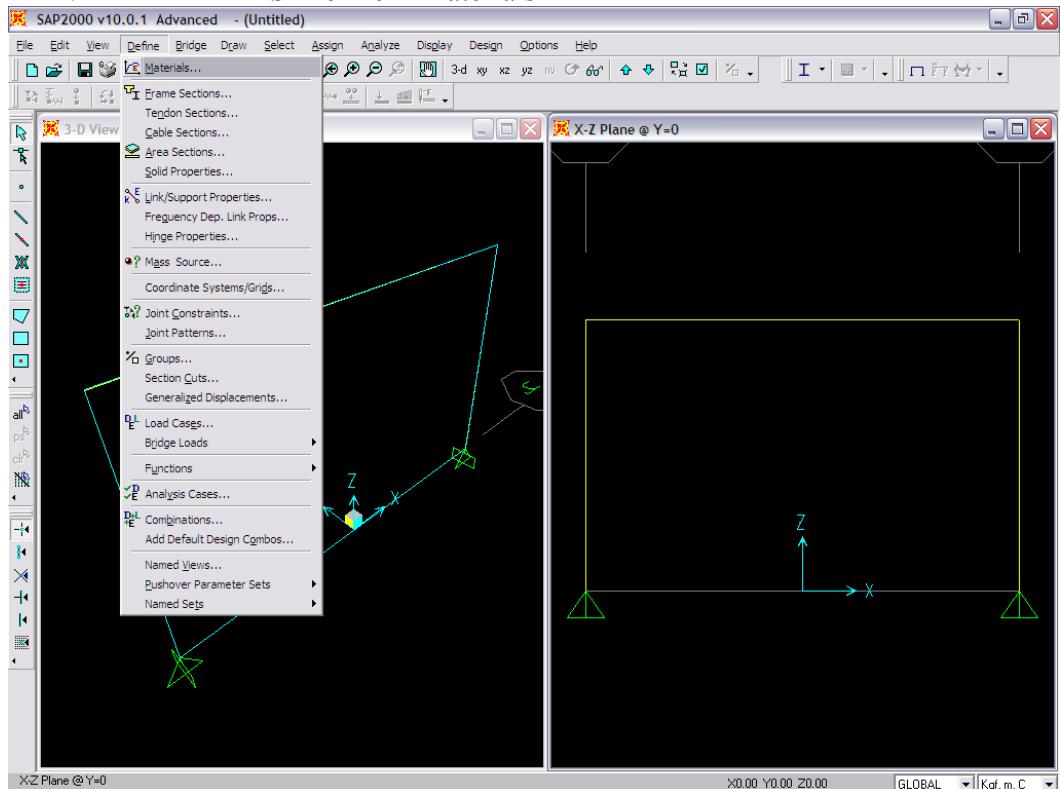


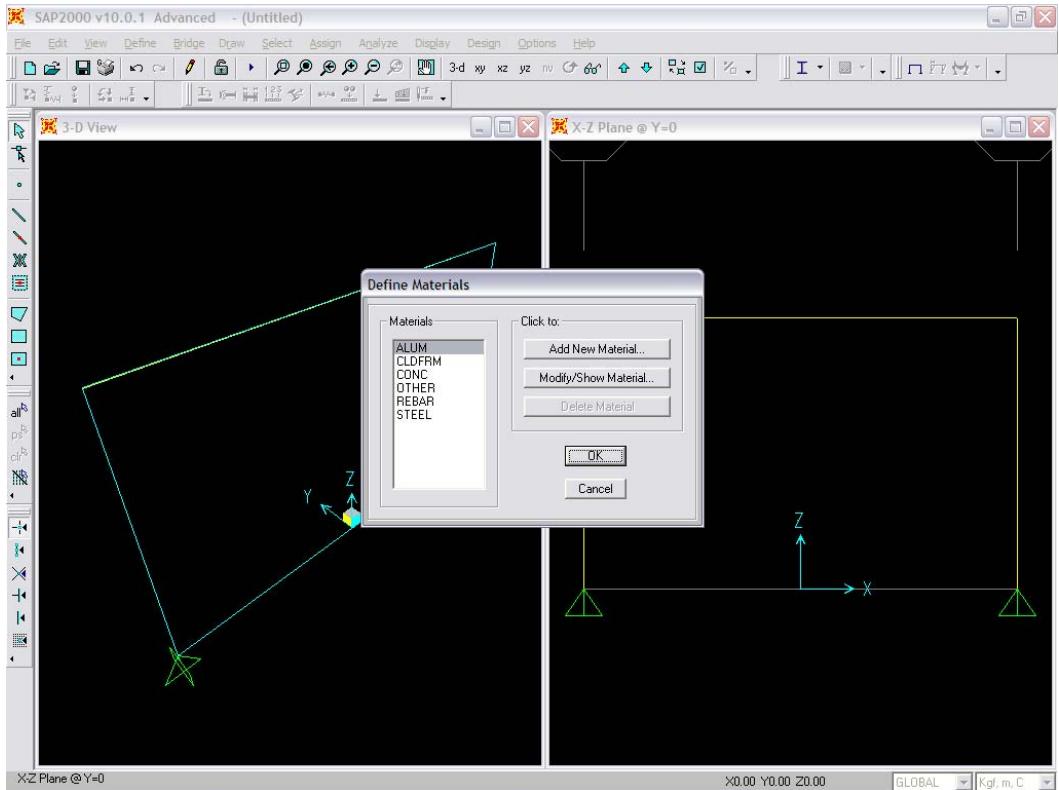
Inmediatamente aparece



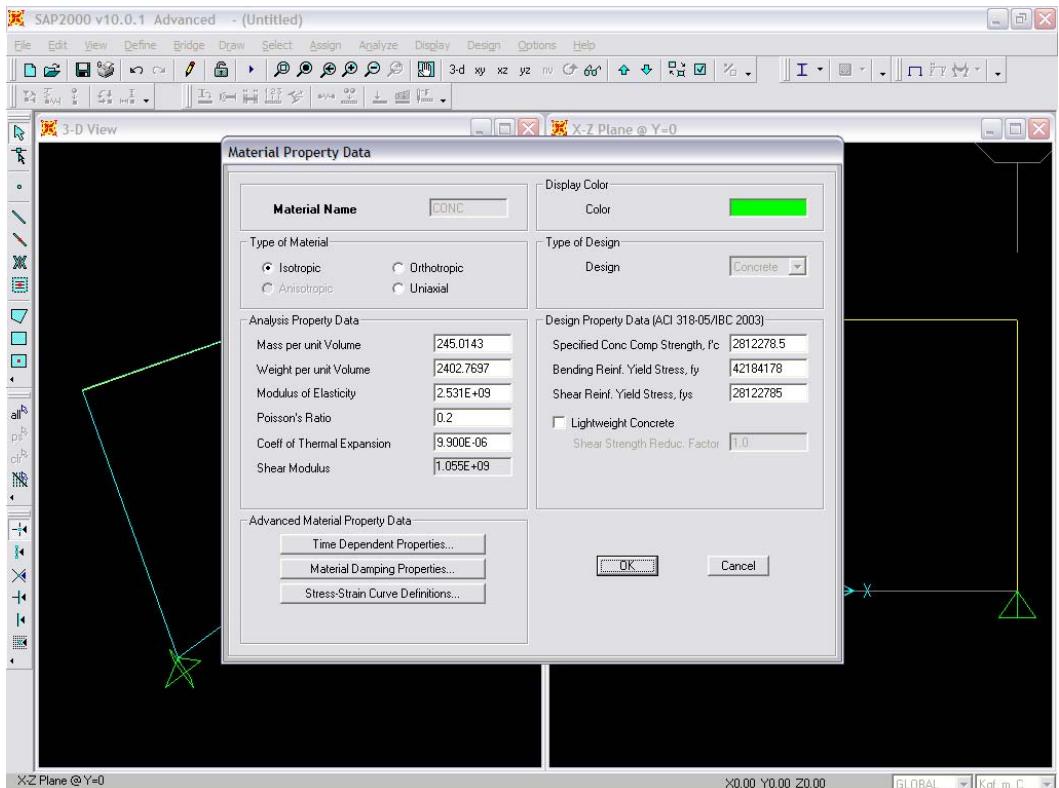
Escoger un lado para trabajar, en éste ejemplo trabajaremos del lado derecho [dar clic en ventana derecha].

## 2.- DEFINIR MATERIALES Define > Materials

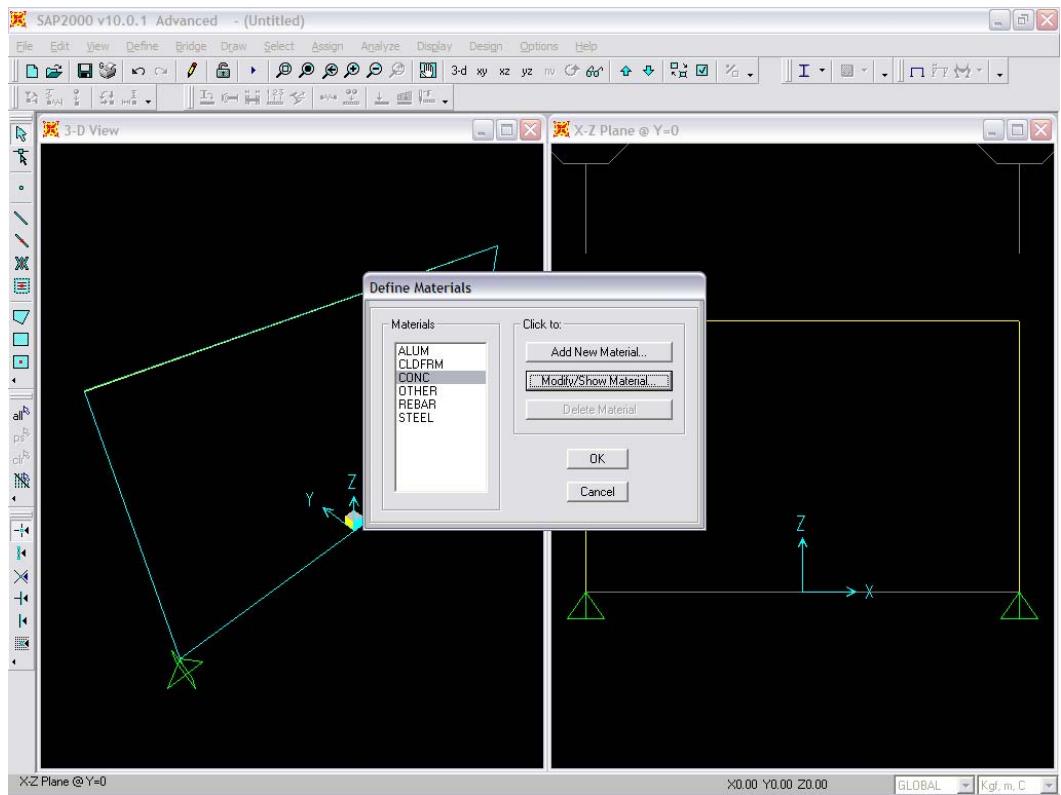




Conc > Modify/Show Material

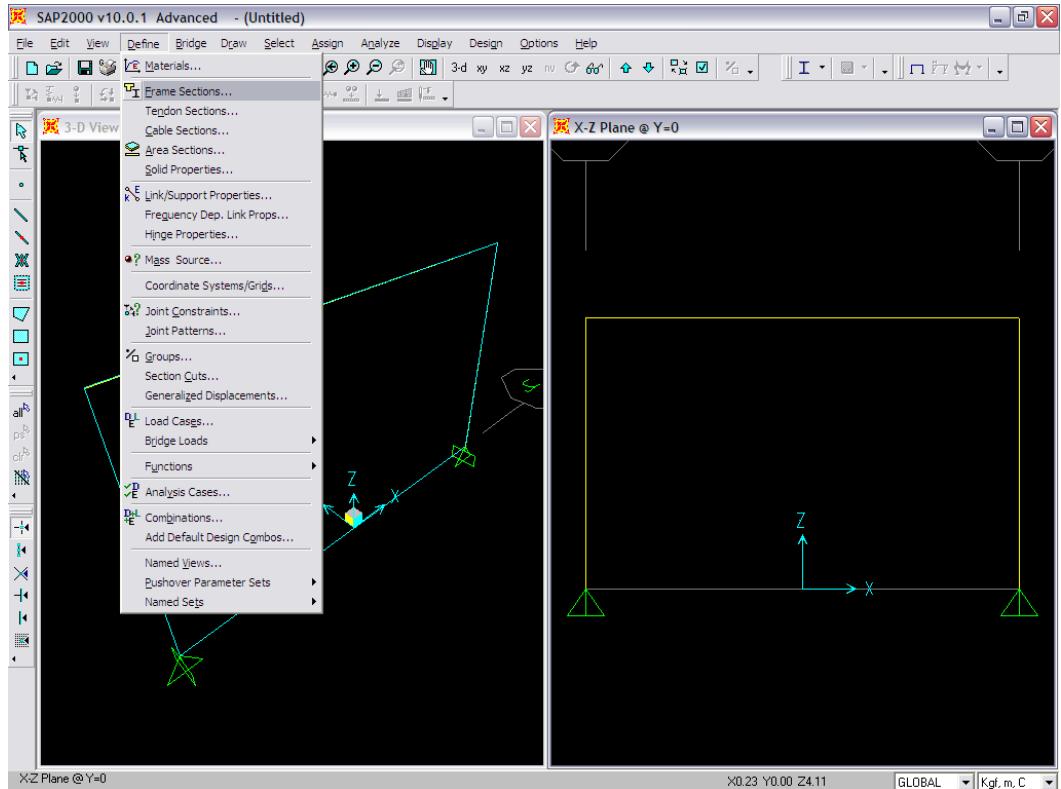


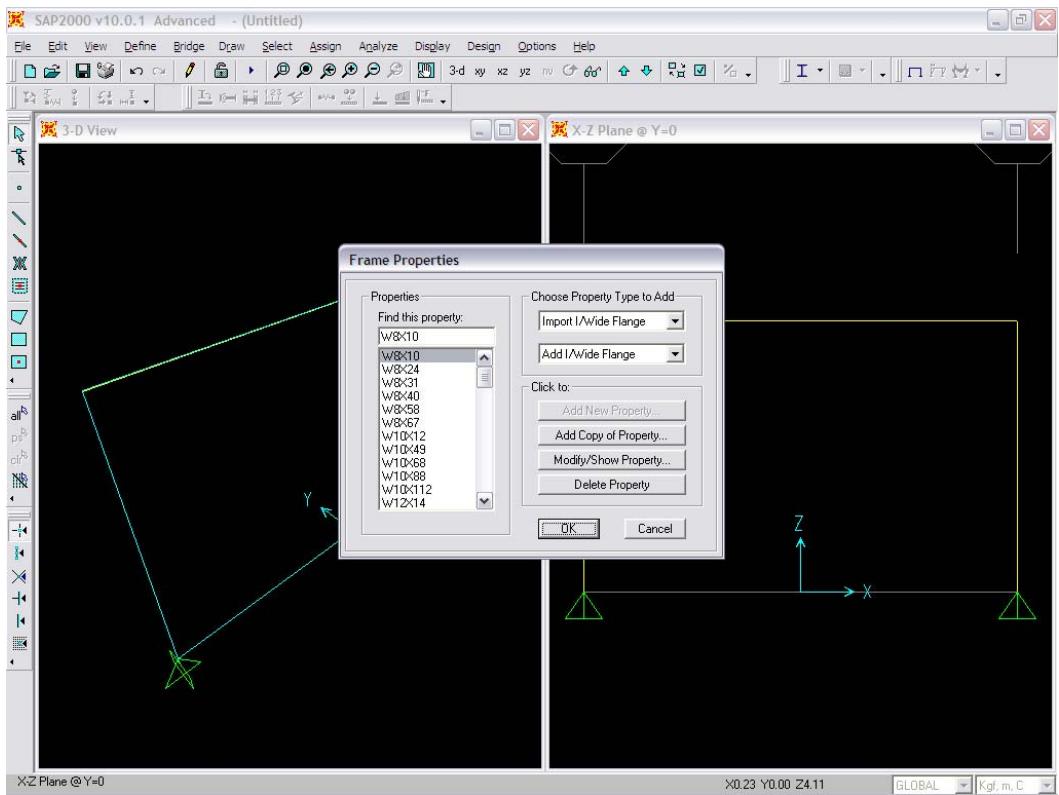
Modulus of Elasticity > 2 213 590 000 [Kg/m<sup>2</sup>]  
 Specified Conc Comp Strength, f'c > 2 500 000 [Kg/m<sup>2</sup>] > Ok > Ok



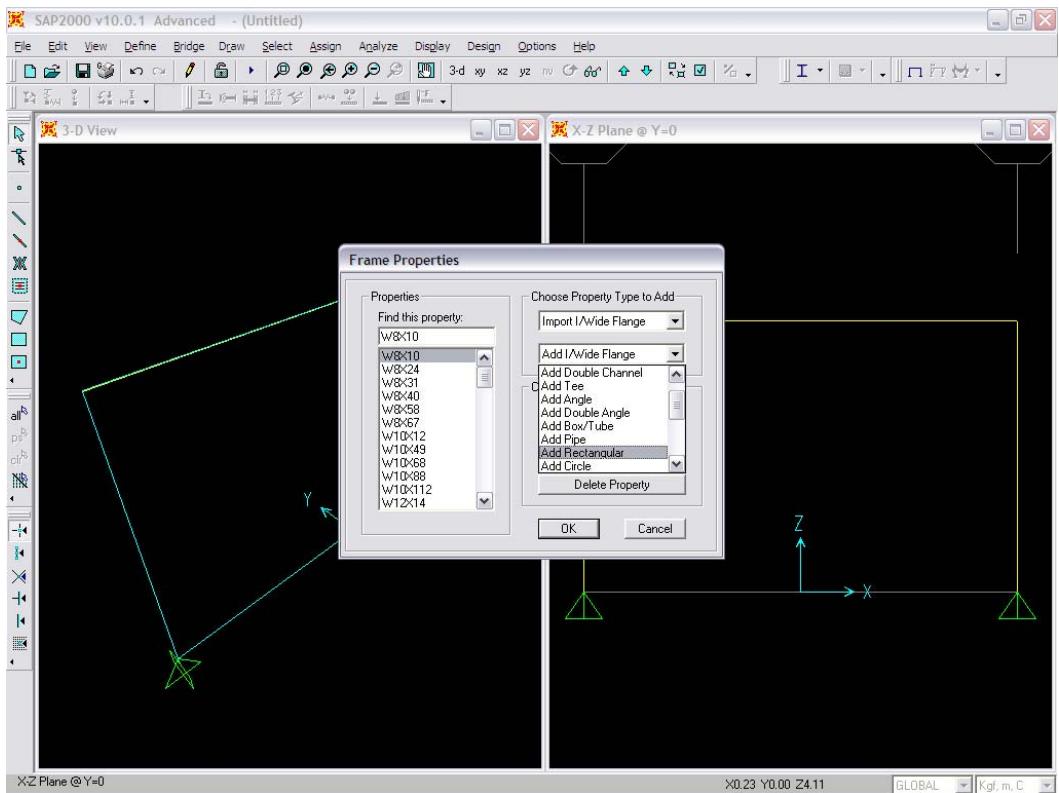
### 3.- DEFINIR SECCIONES

Define > Frame Sections

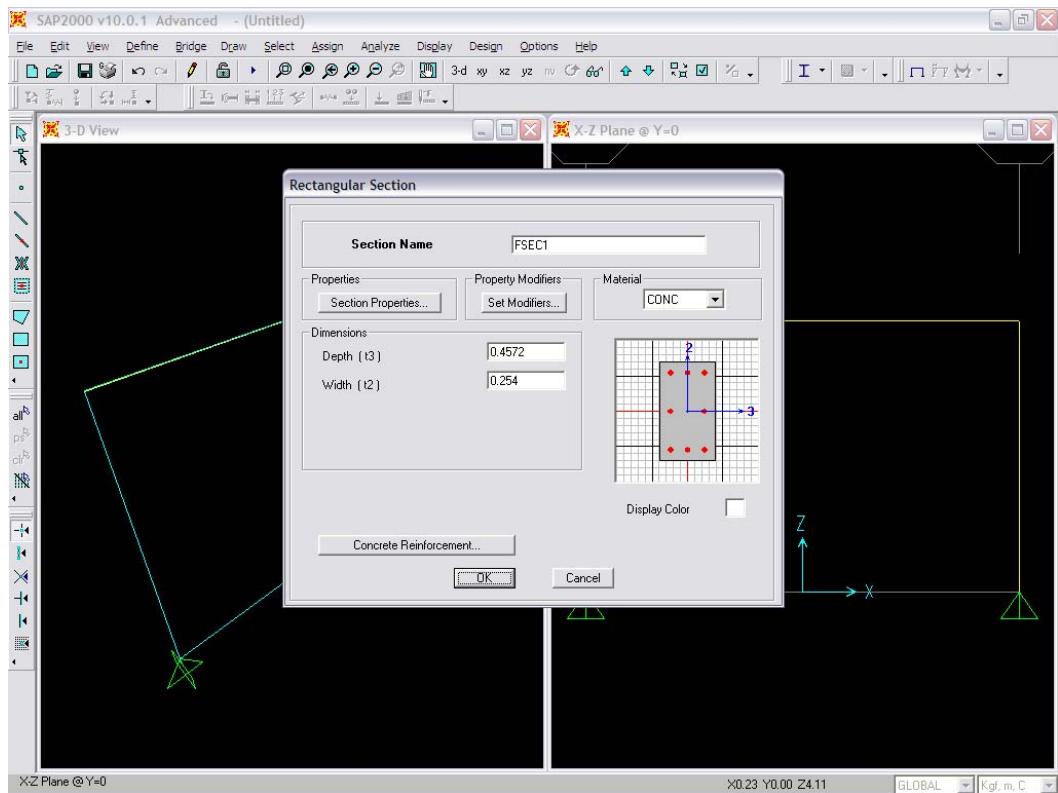




Choose Property Type to Add > Add Rectangular



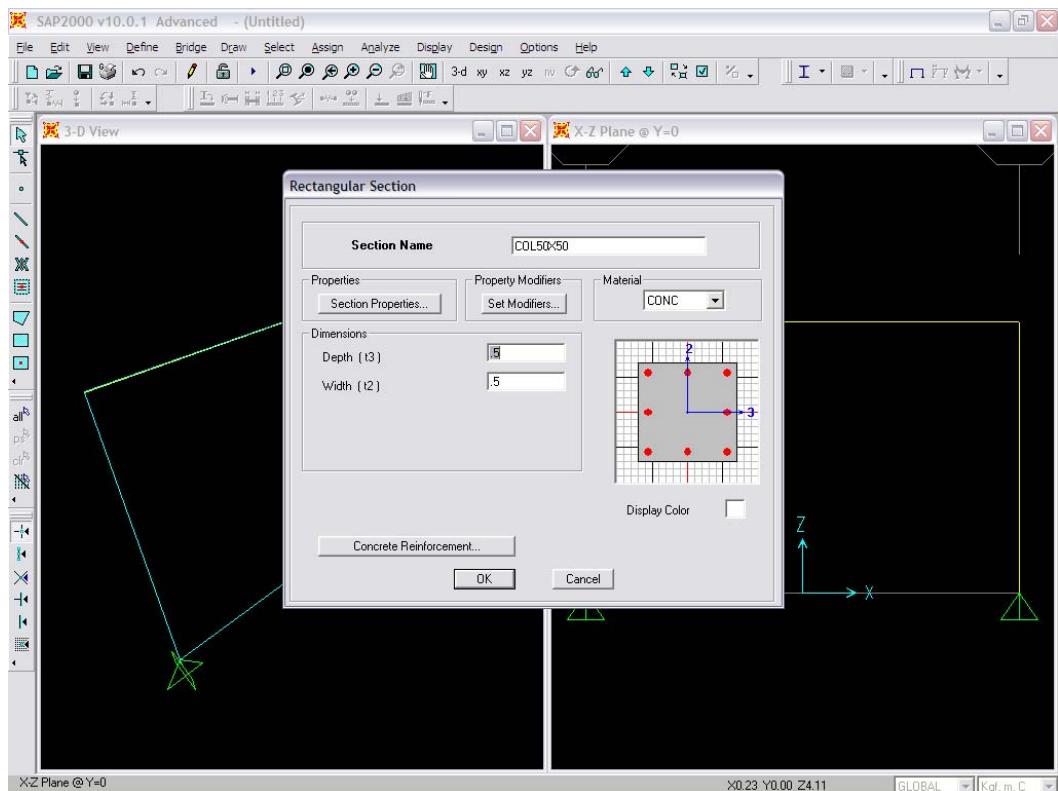
Click to > Add New Property

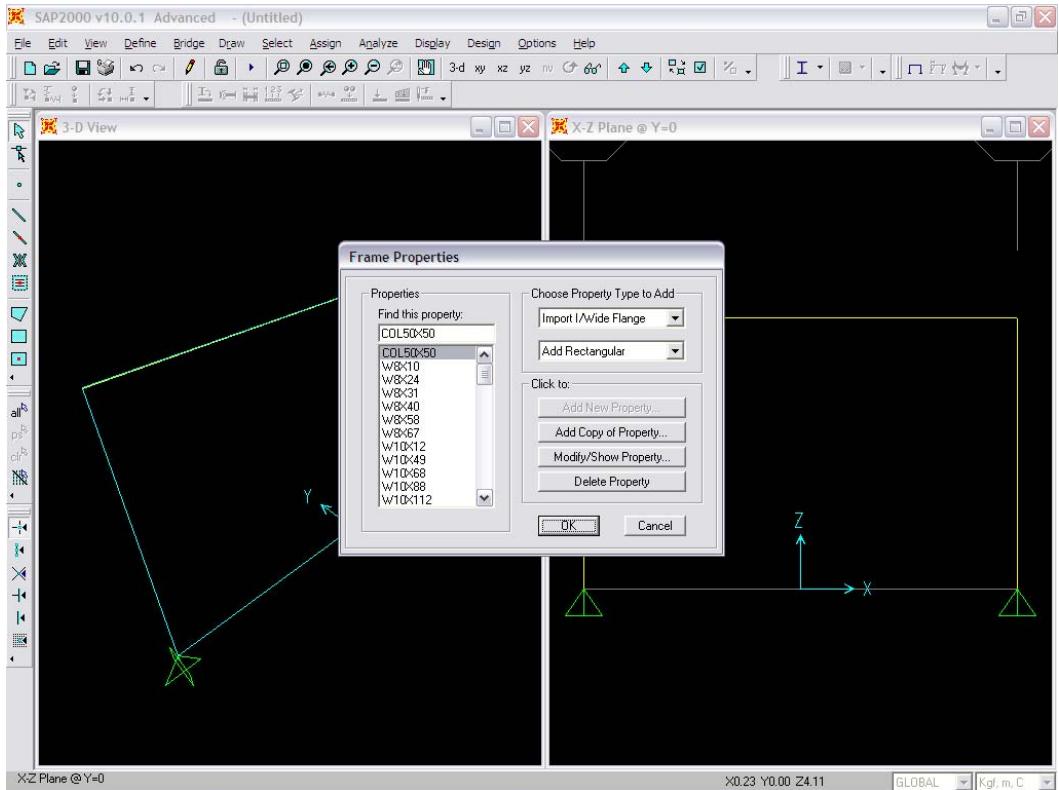


Section Name > Col 50x50 [cm] [nombre de la sección]

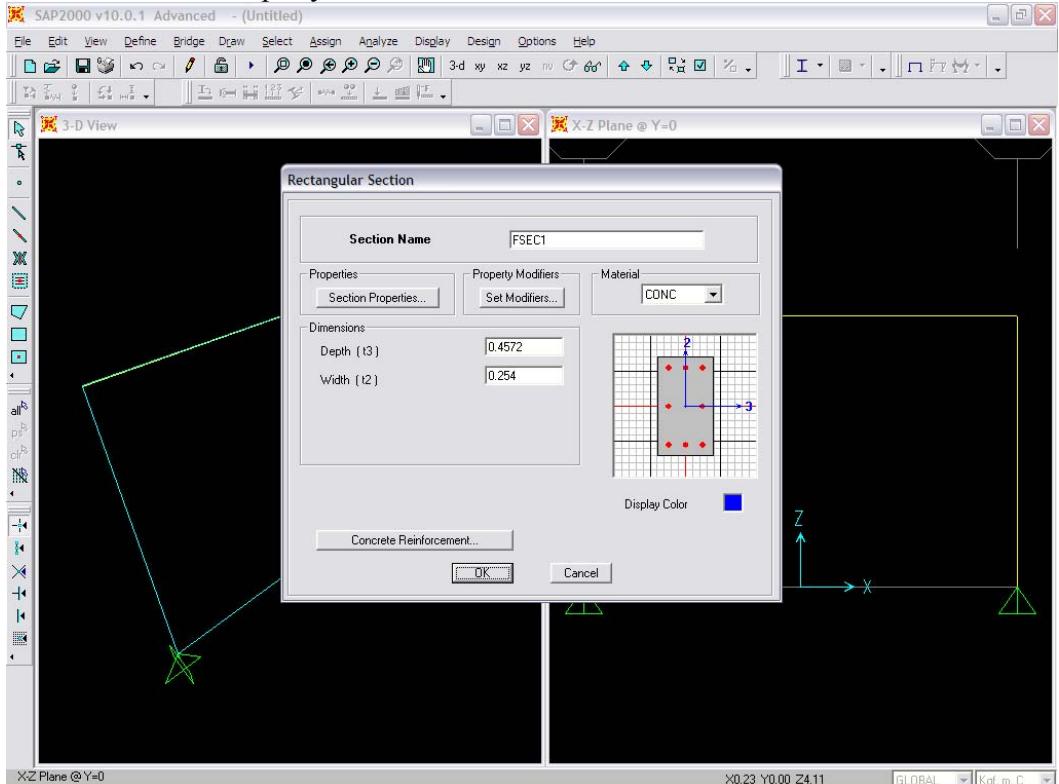
Material > Conc [material]

Depth > 0.5 [m] , Width > 0.5 [m] > Ok [profundo, ancho]

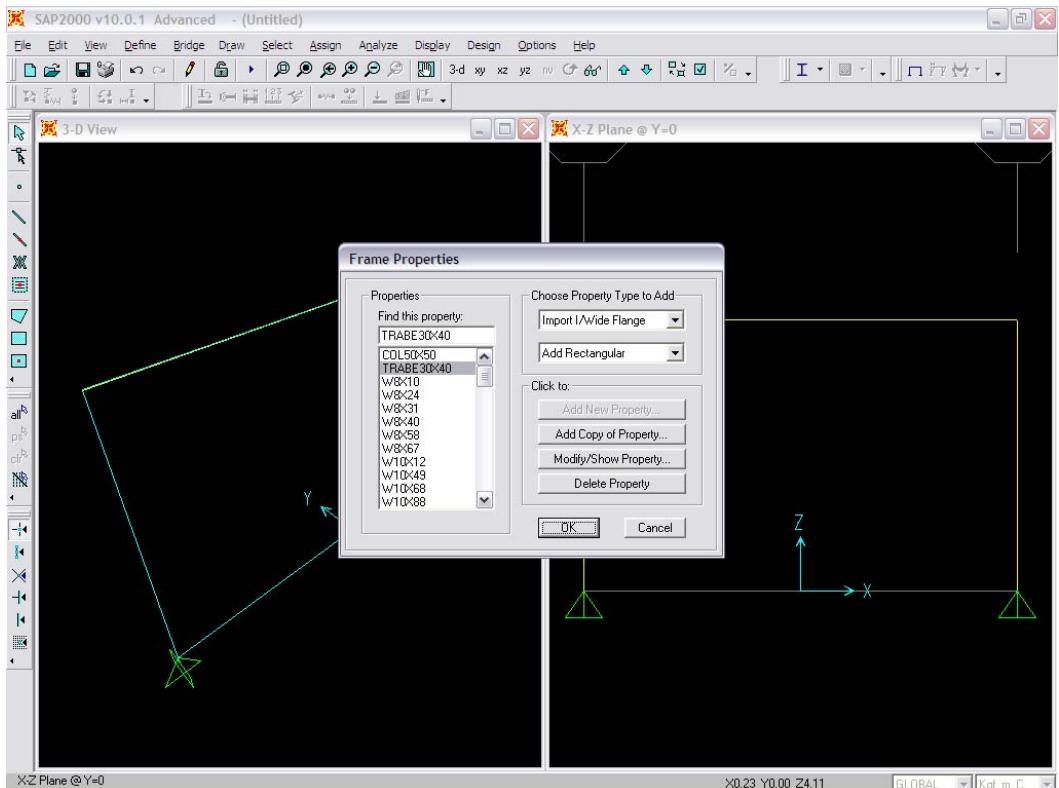
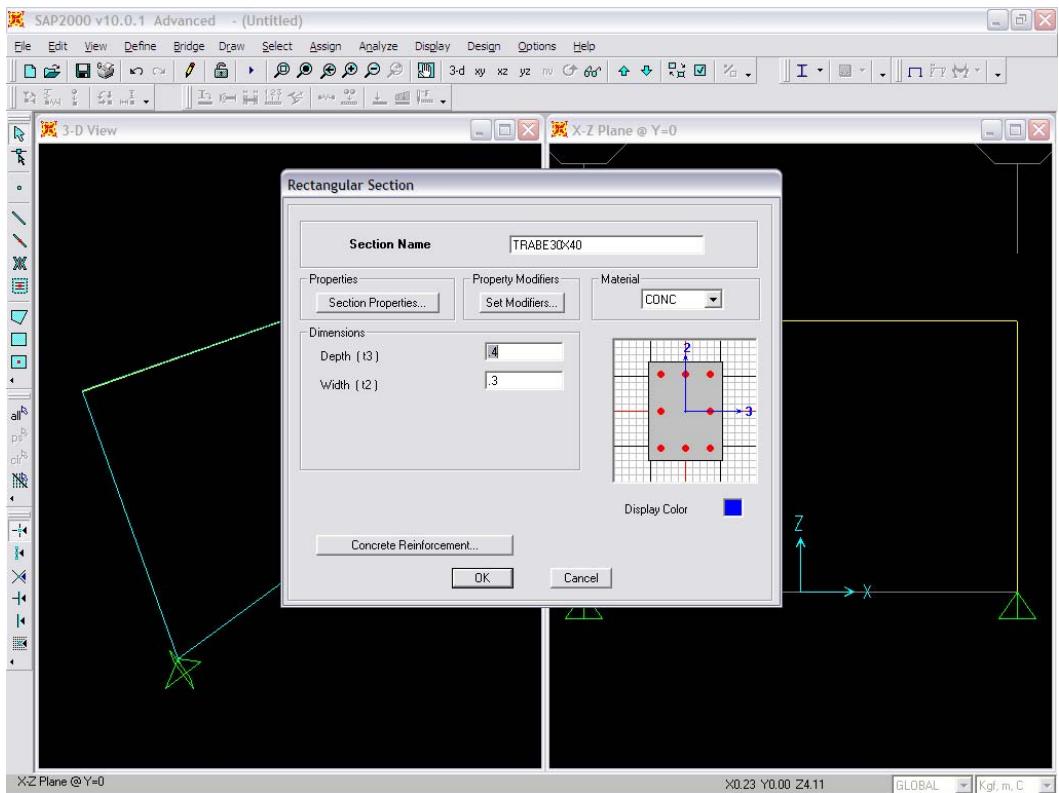




Choose Property Type to Add > Add Rectangular  
Click to > Add New Property



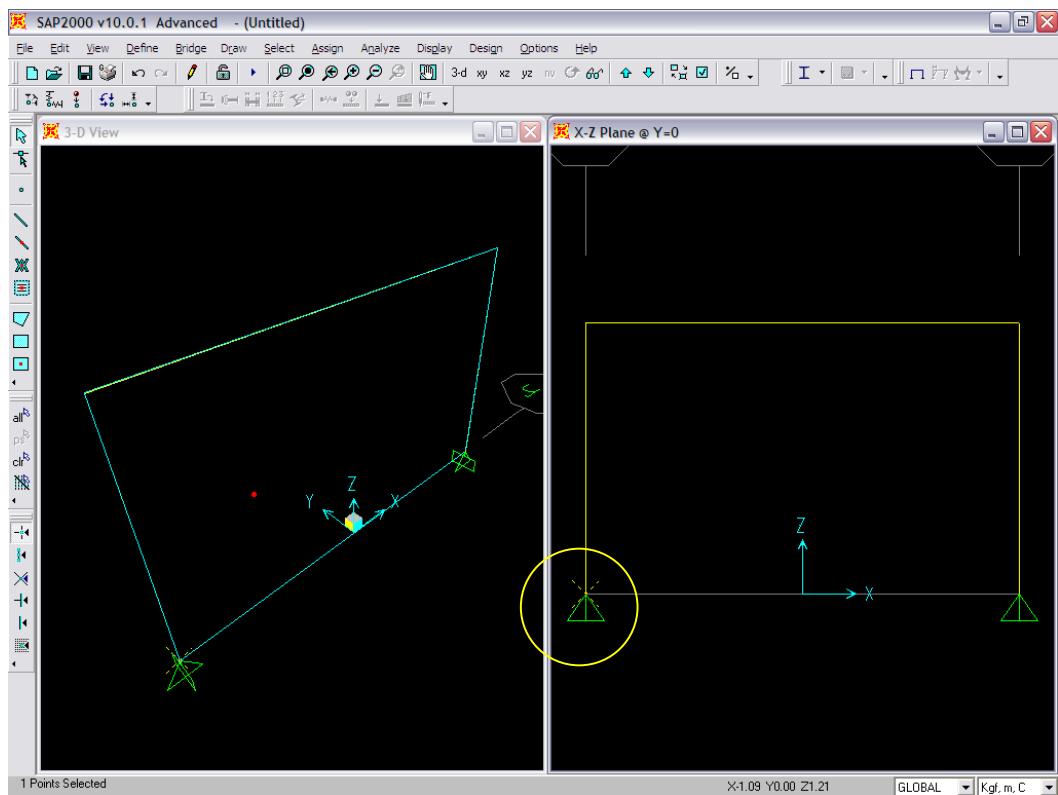
Section Name > Trabe 30x40 [cm] [nombre de la sección]  
Material > Conc [material]  
Depth > 0.4 [m] , Width > 0.3 [m] > Ok > Ok [profundo, ancho]



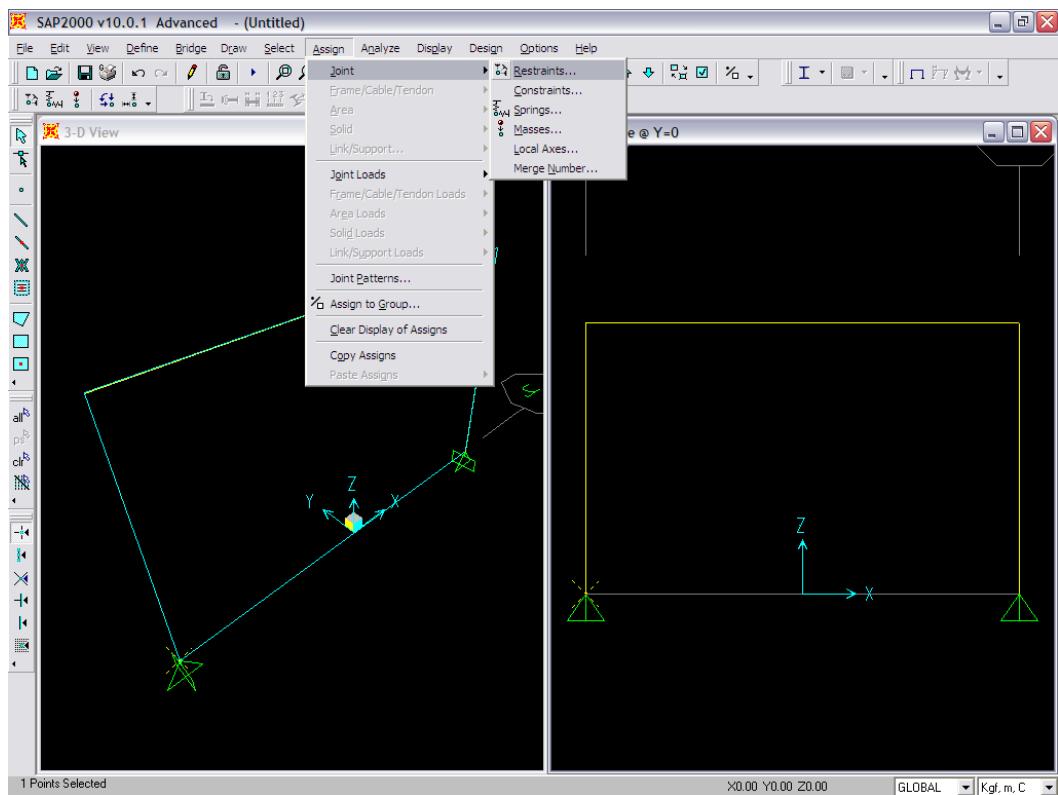
#### 4.- ASIGNAR CONDICIONES DE APOYO, TIPOS DE SECCIONES Y CARGAS

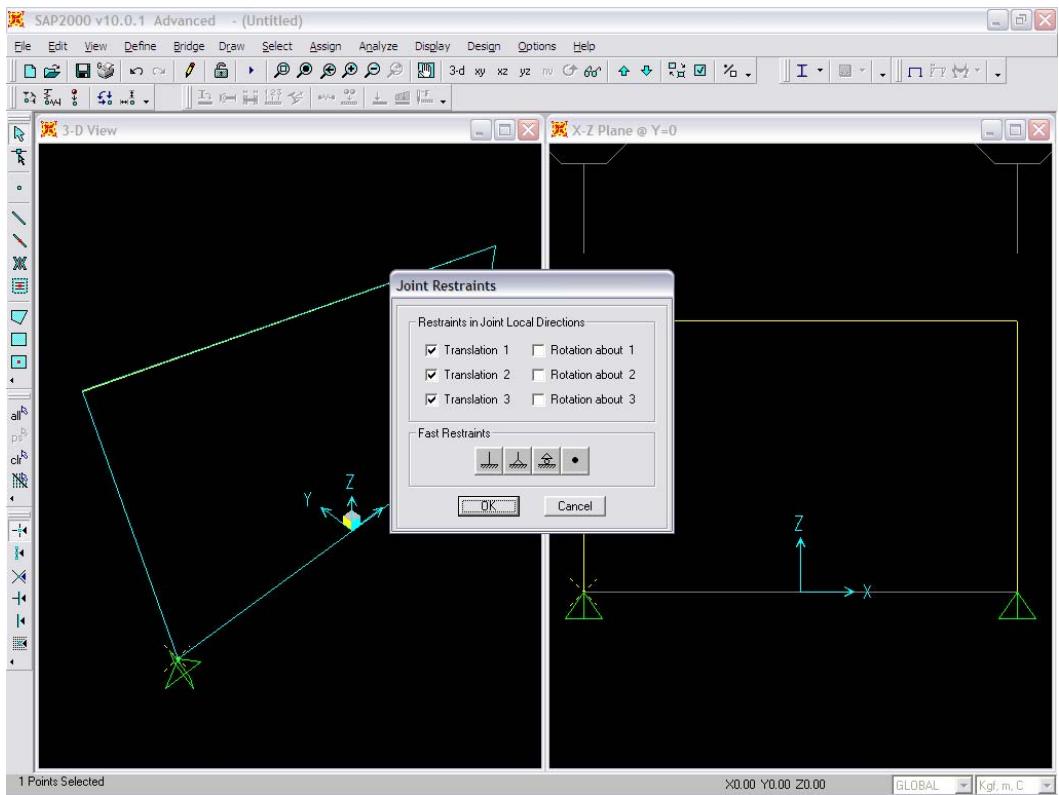
##### 4.1.- Asignar Condiciones de Apoyo

Seleccionar el primer apoyo con el mouse

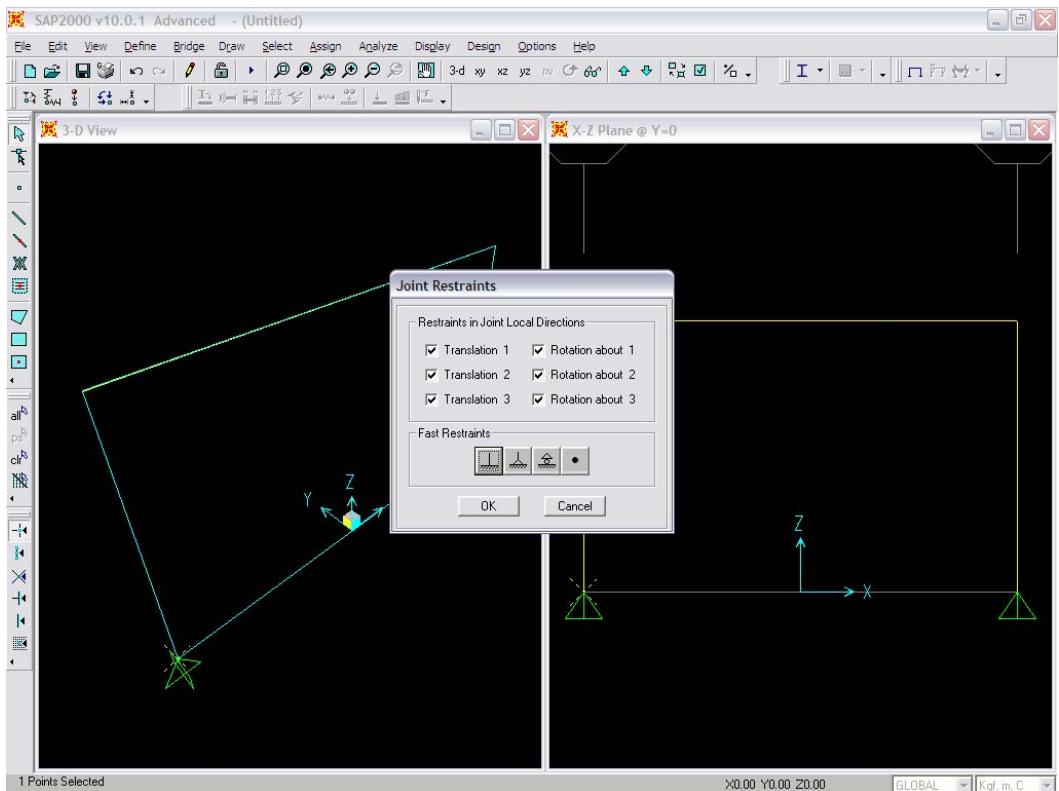


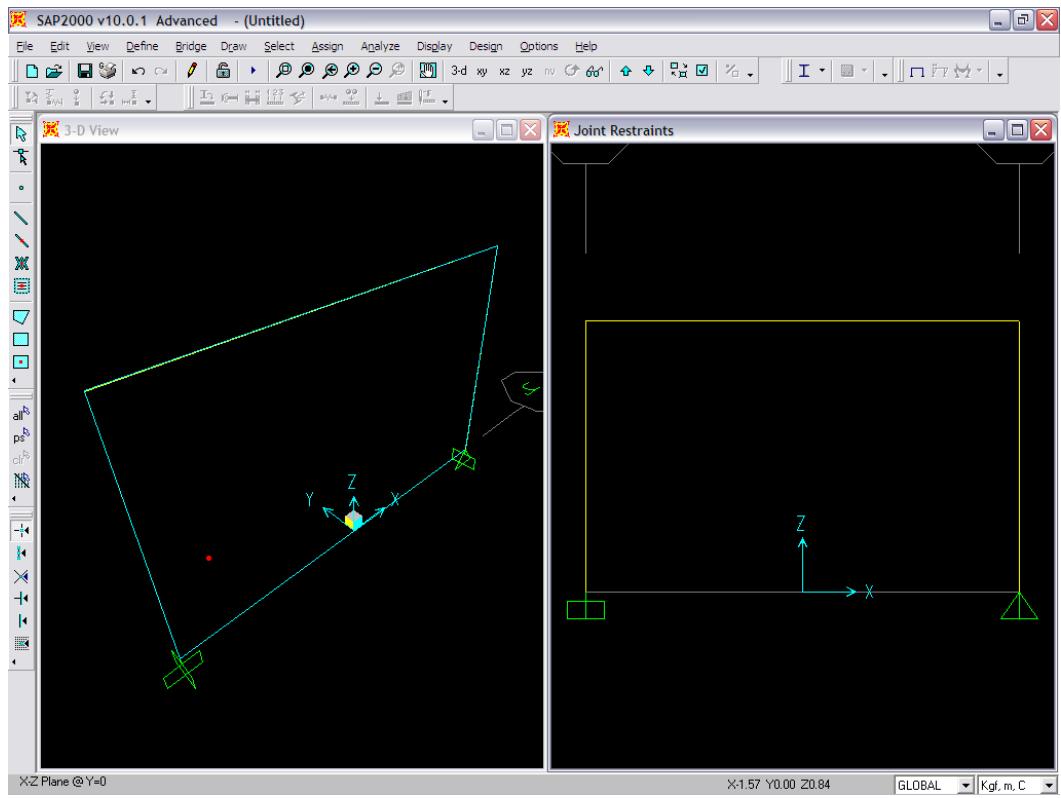
Assign > Joint > Restraints



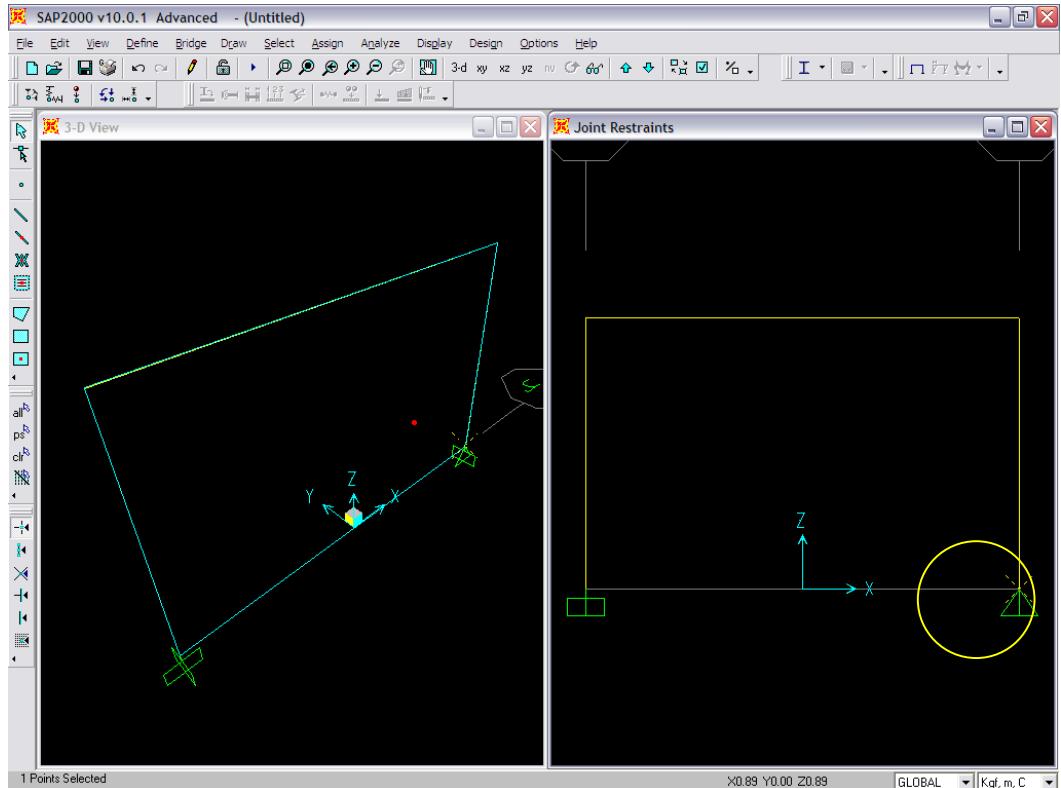


Apoyo empotrado > Dar clic > Ok

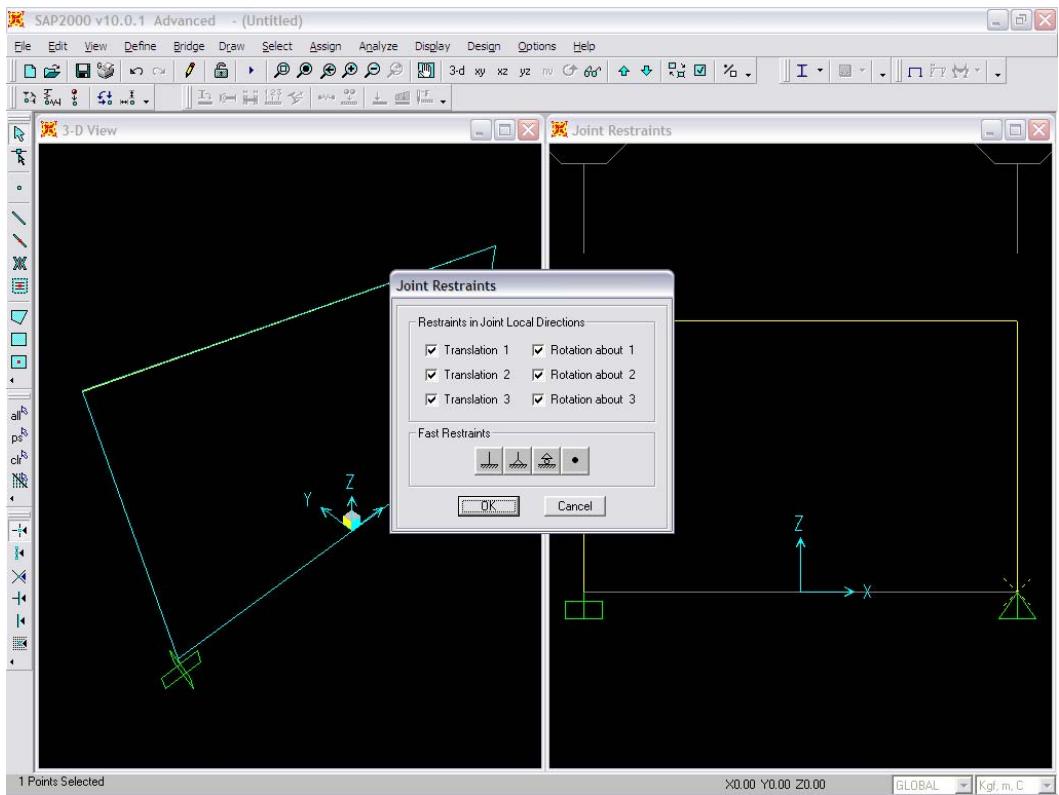




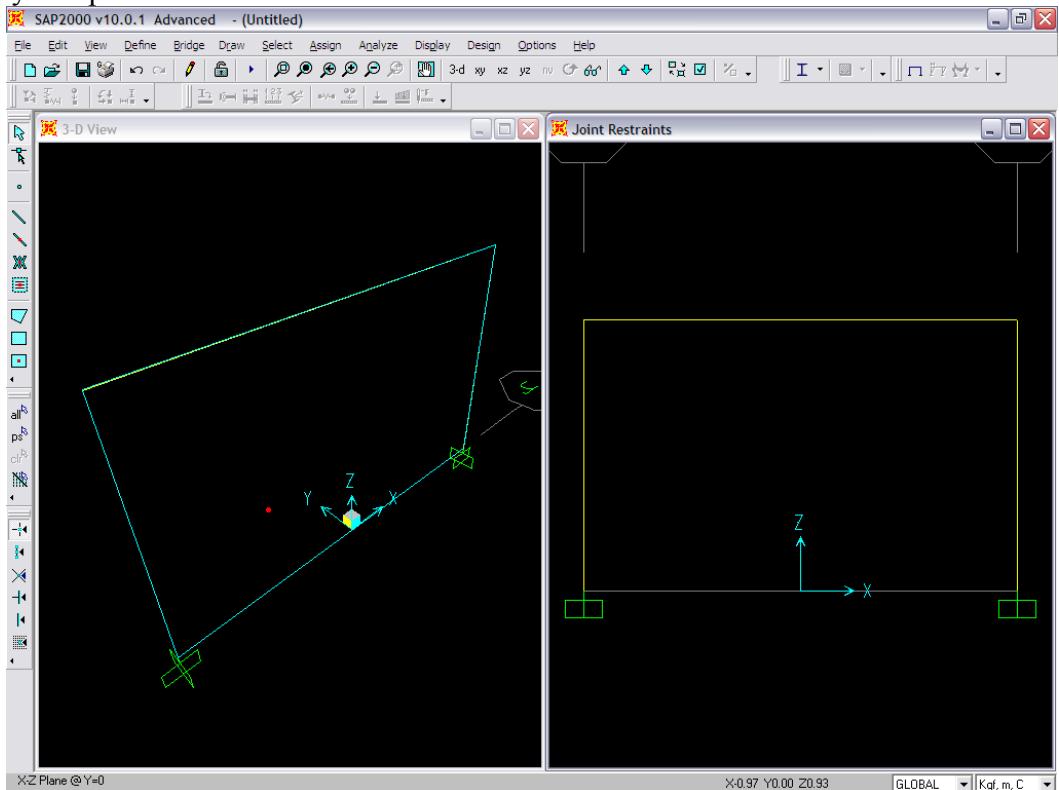
Seleccionar el segundo apoyo con el mouse



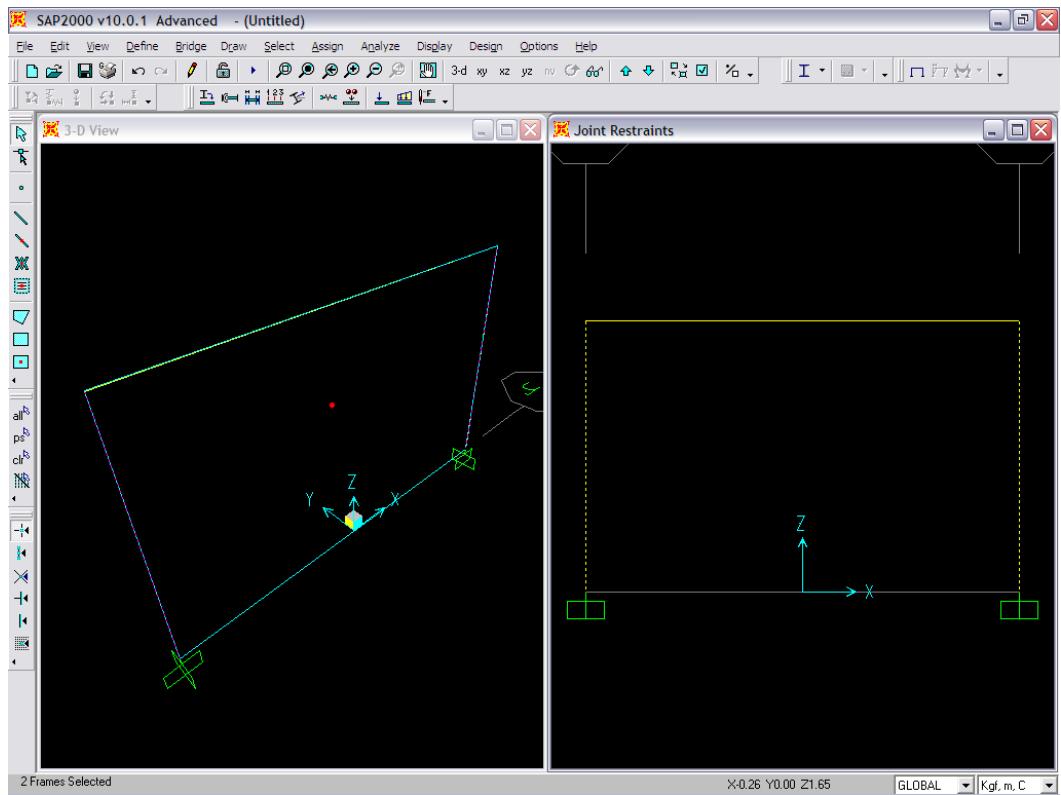
Assign > Joint > Restraints



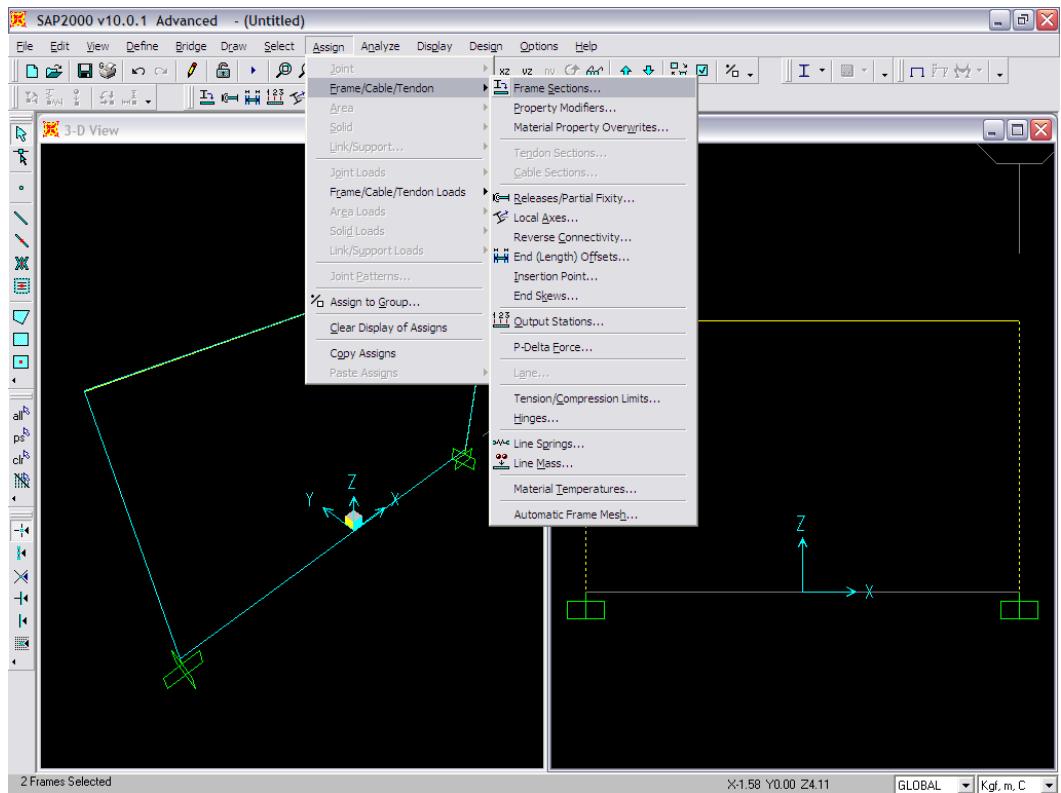
Apoyo empotrado > Dar clic > Ok

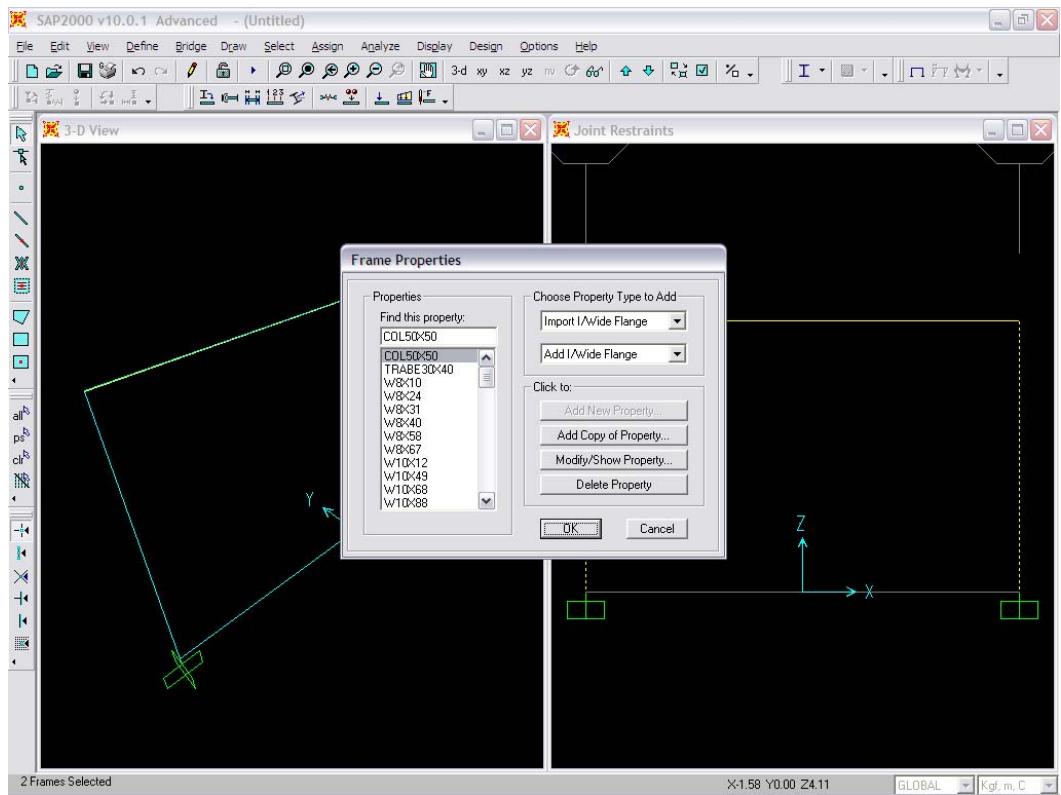


4.2.- Asignar Tipos de Secciones  
Seleccionar las columnas con el mouse

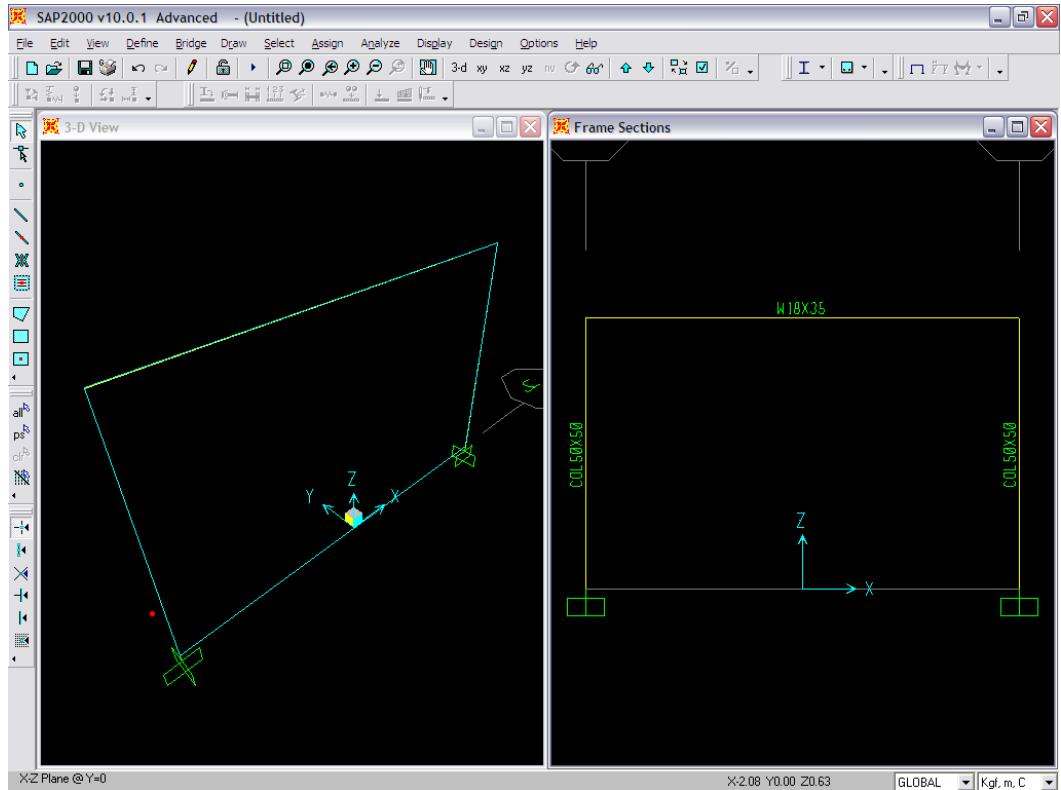


Assign > Frame/Cable/Tendon > Frame Sections

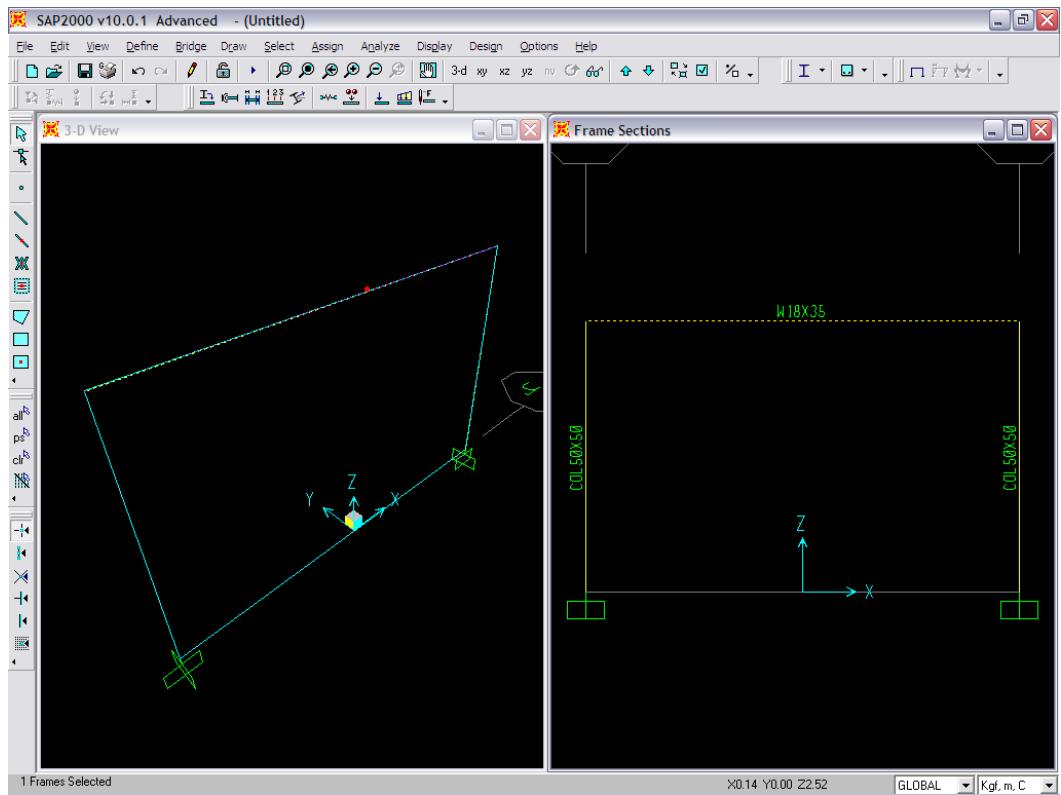




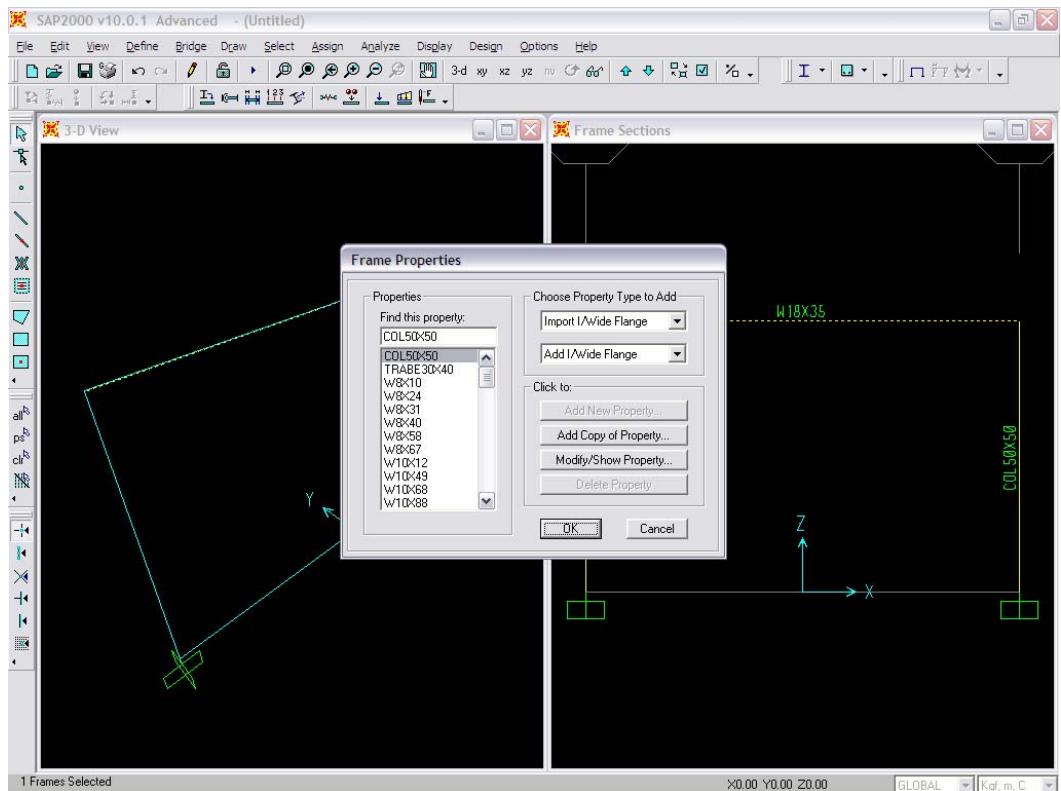
Seleccionar Col 50x50 > Ok



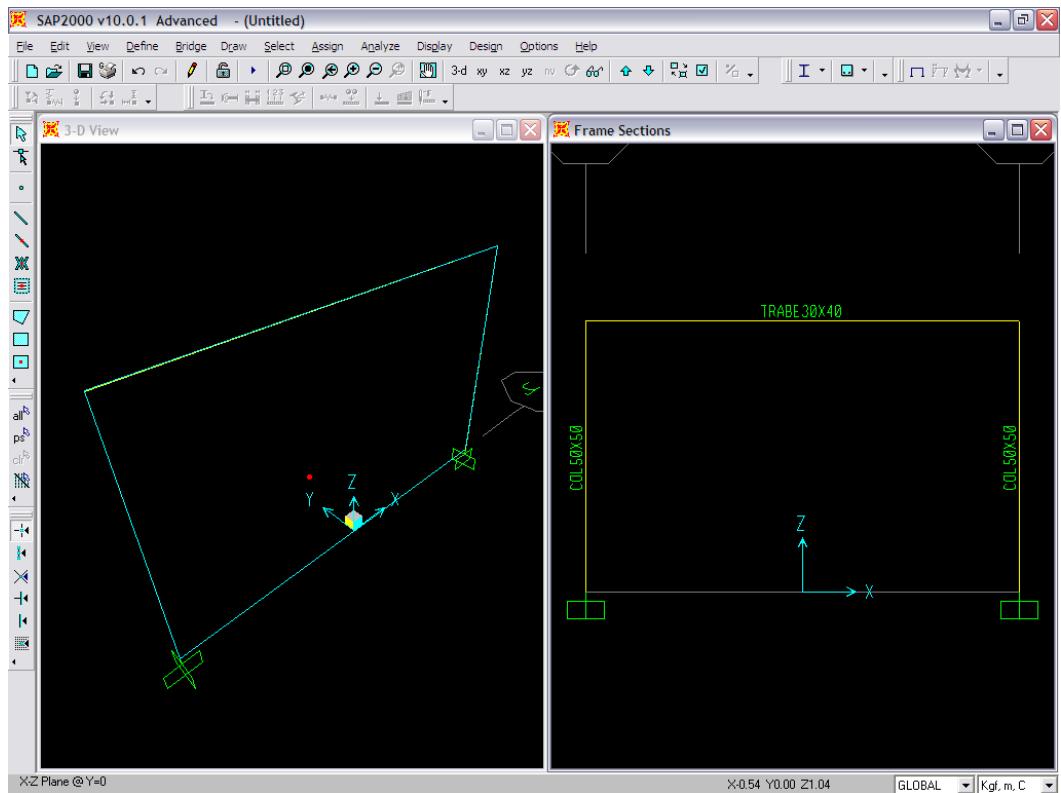
Seleccionar la trabe con el mouse



Assign > Frame/Cable/Tendon > Frame Sections

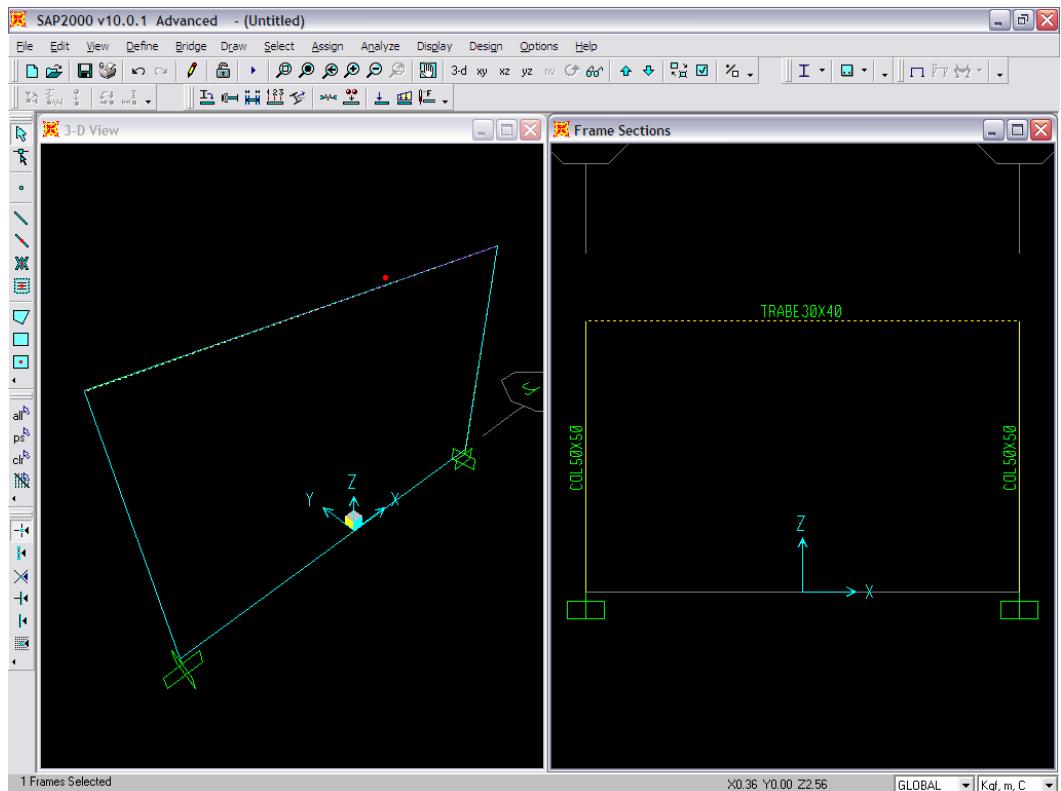


Seleccionar Trabe 30x40 > Ok

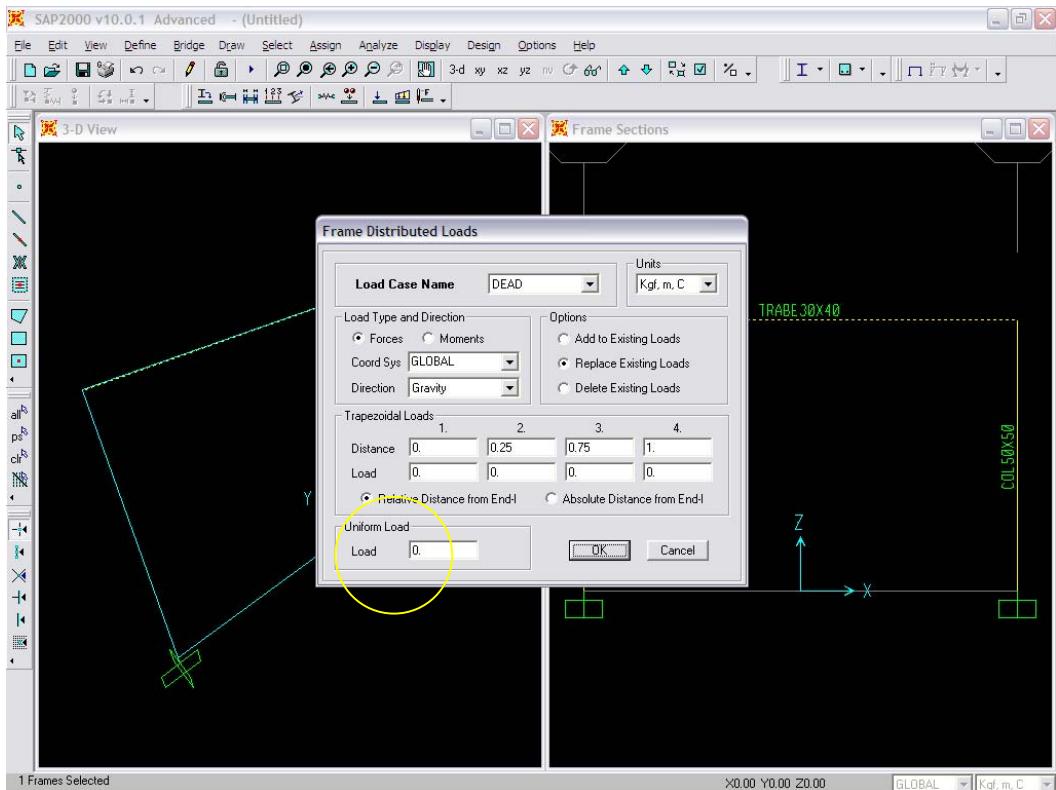
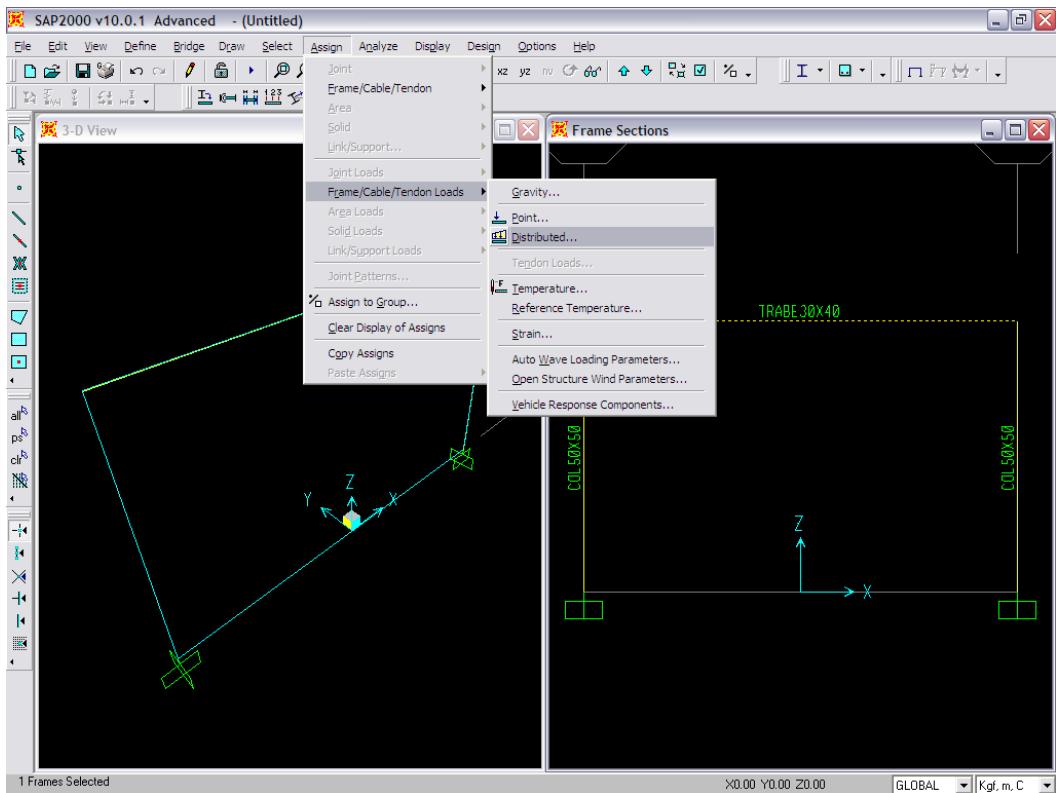


### 5.3.- Asignar Cargas

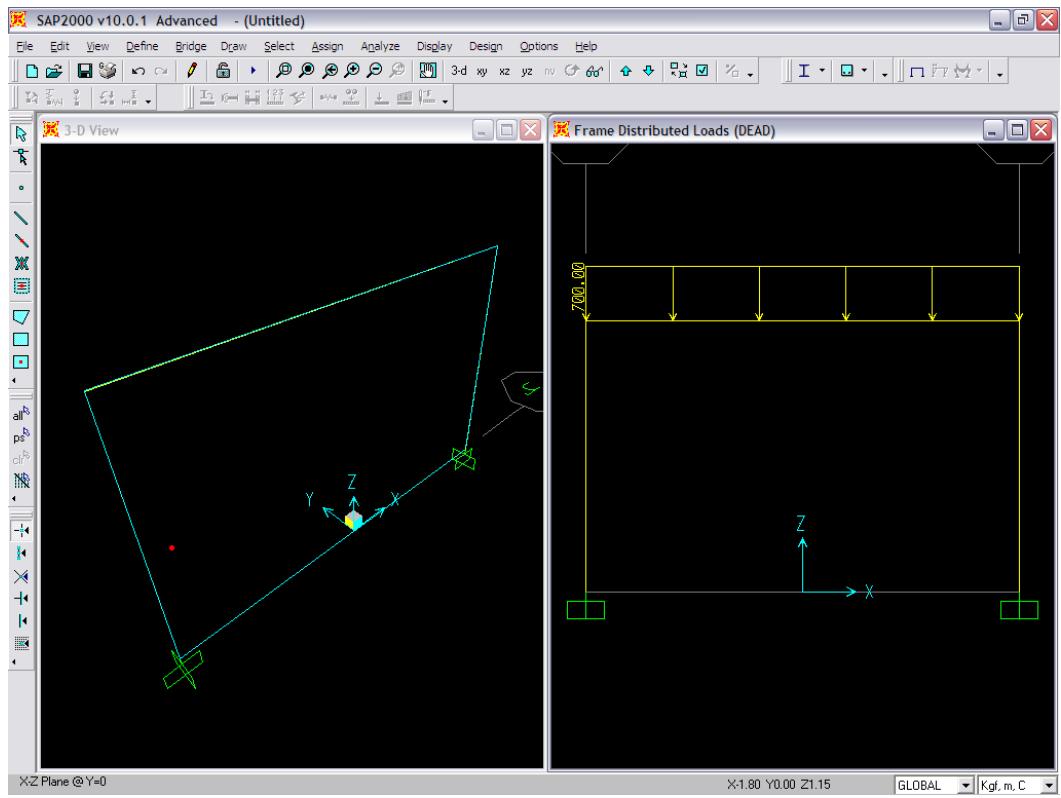
Seleccionar la trabe donde será aplicada la carga uniforme



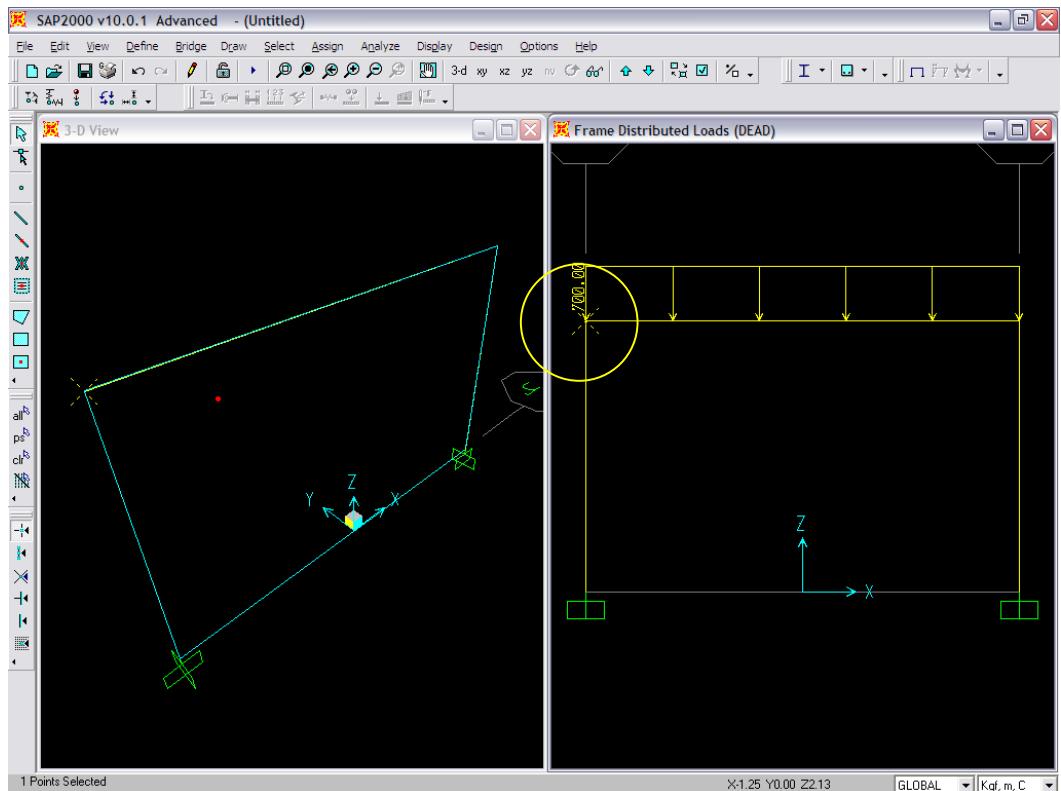
Assign > Frame/Cable/Tendon Loads > Distributed



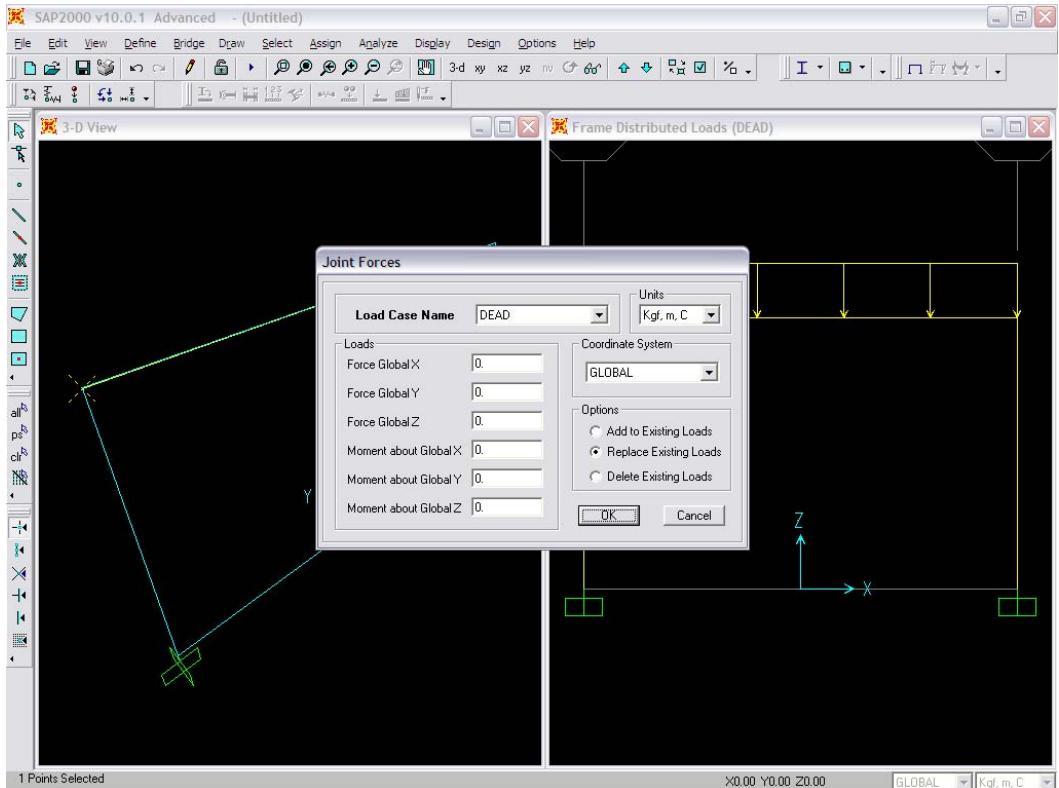
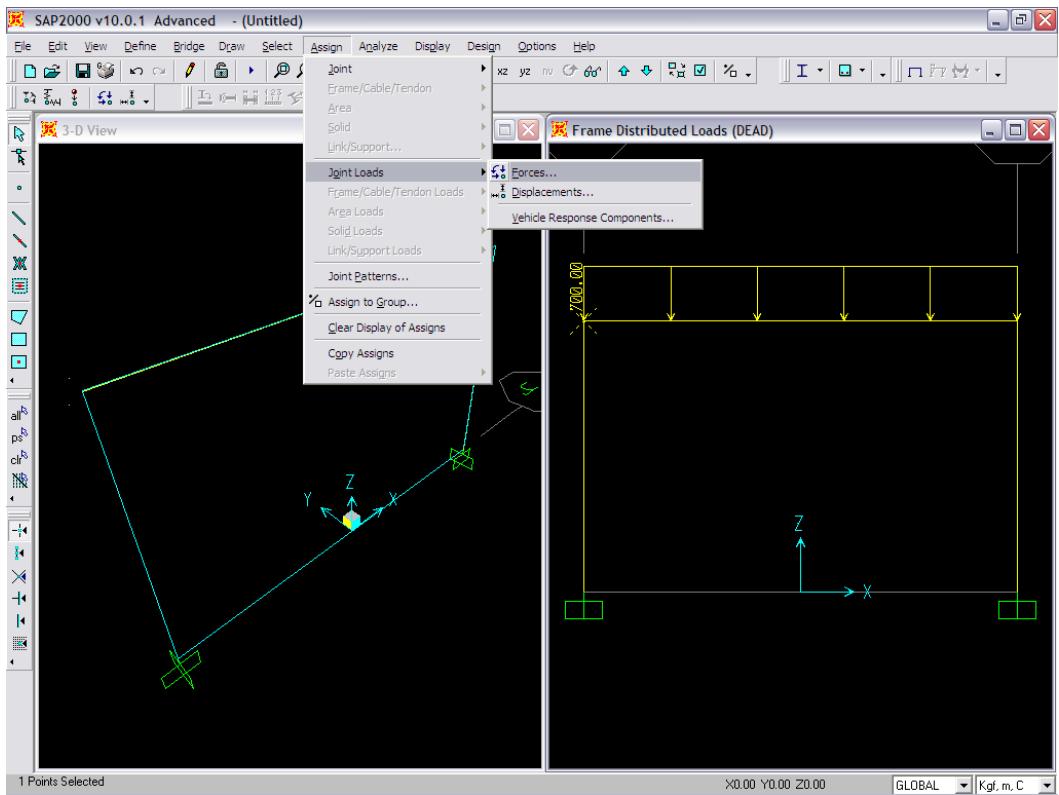
Uniform Load > 700 [kg] [carga uniforme]



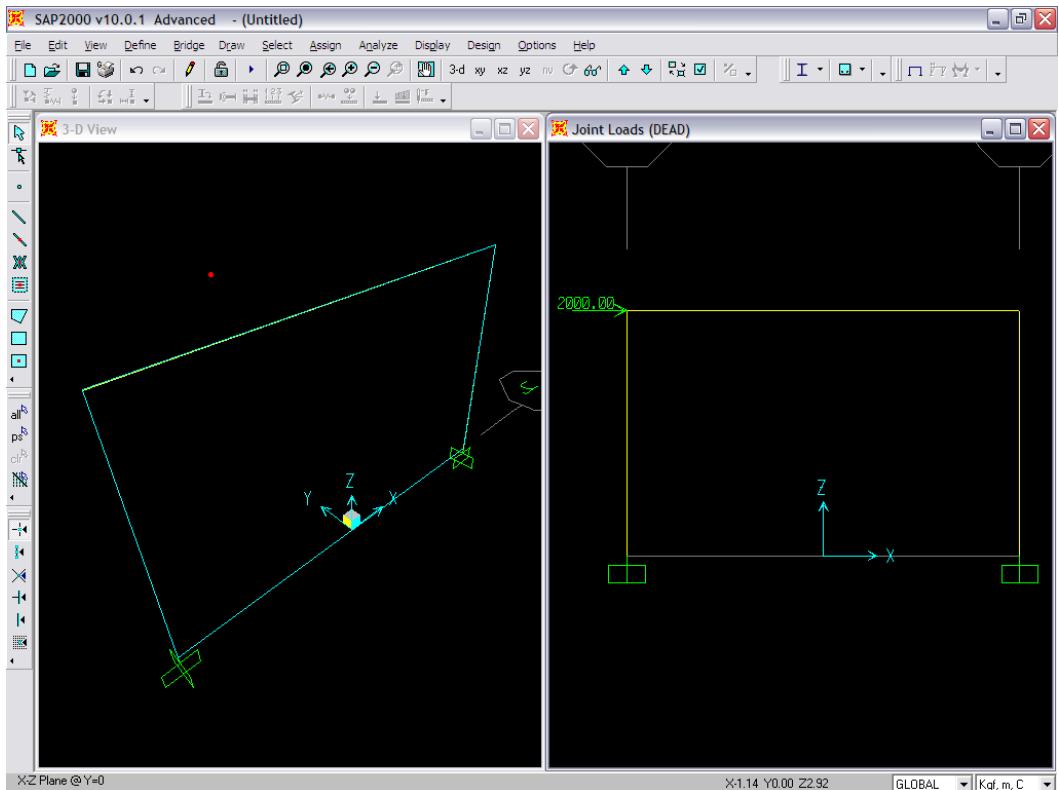
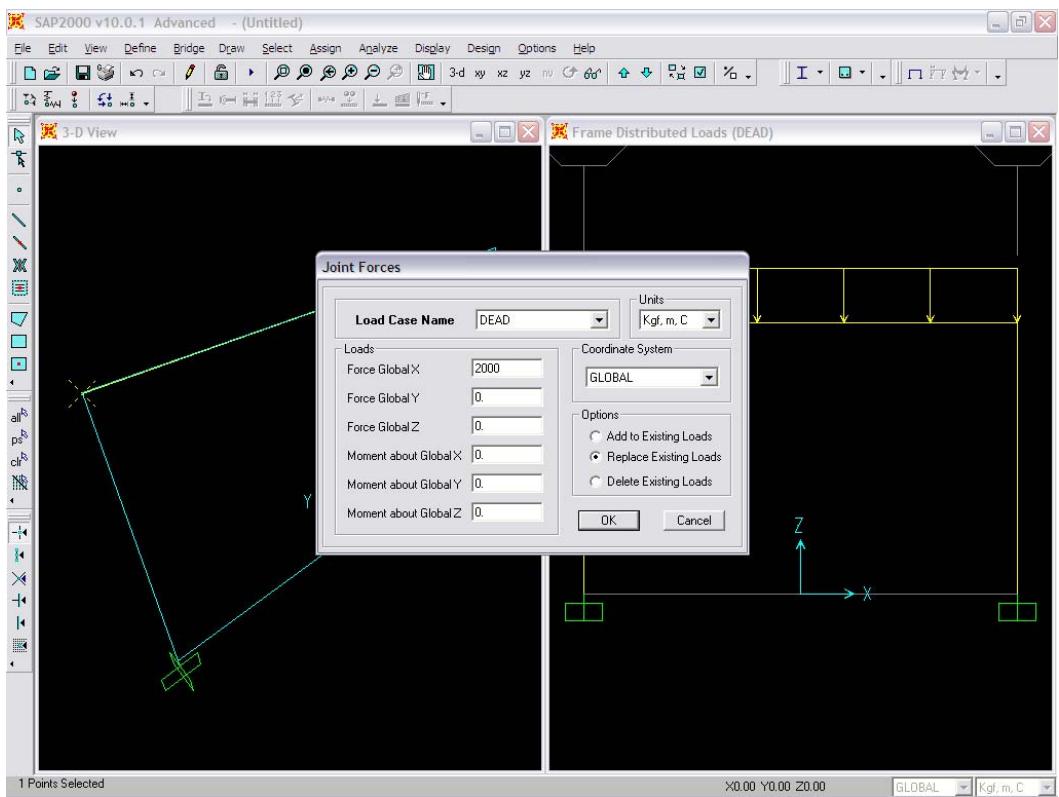
Seleccionar ahora el nodo donde será aplicada la fuerza



Assign > Joint Loads > Forces

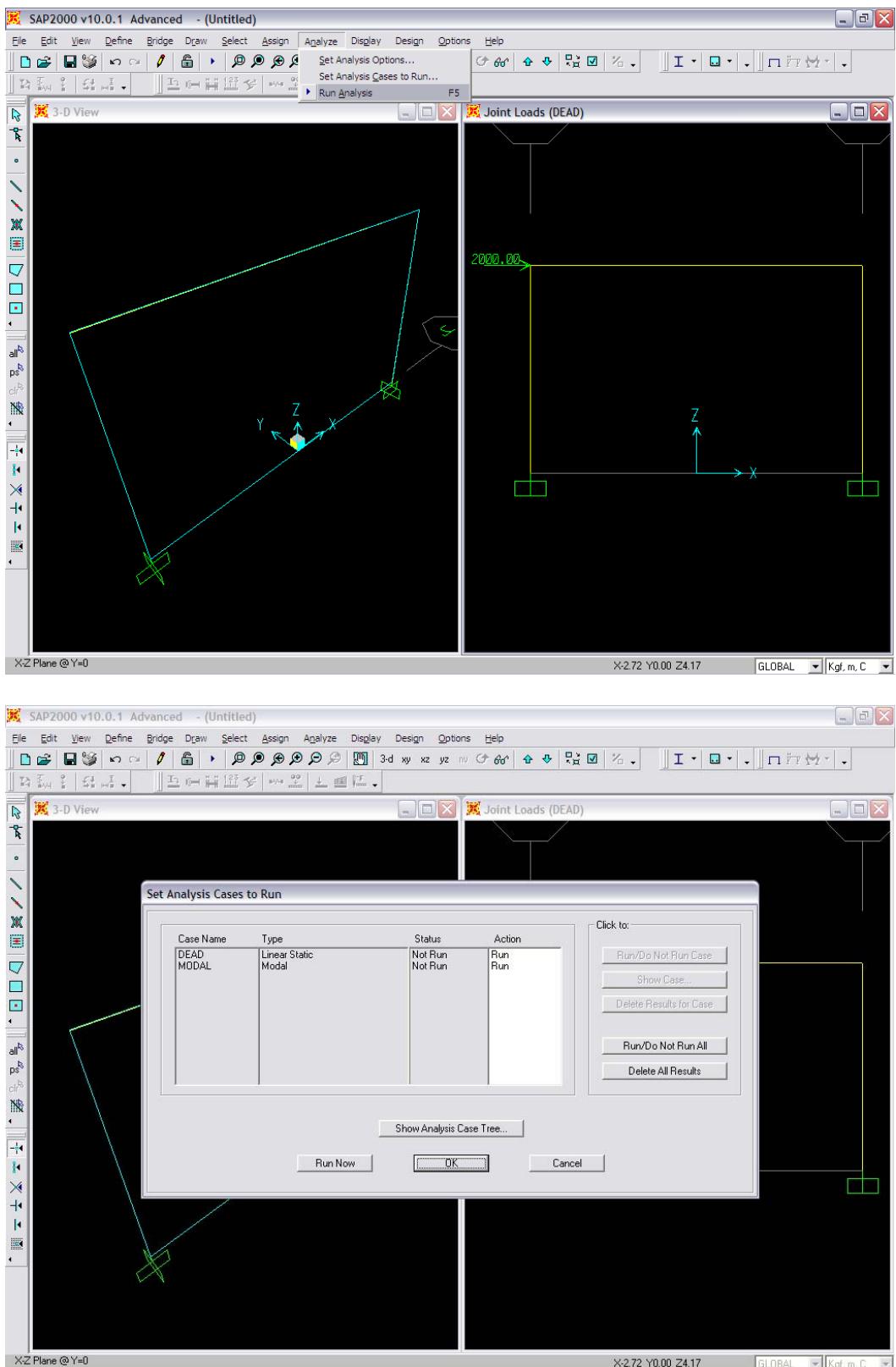


Force Global X > 2000 > Ok [fuerza en el eje X global]

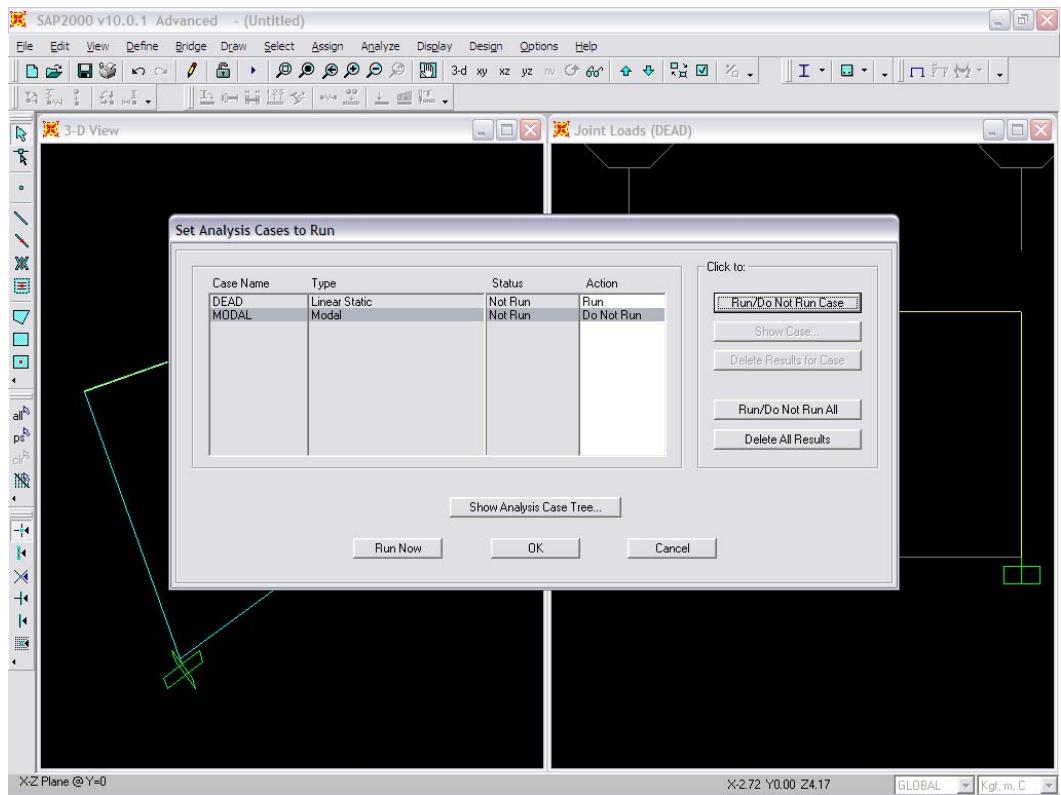


## 6.- ANALIZAR [EJECUTAR] EL PROGRAMA

Analize > Run Analysis



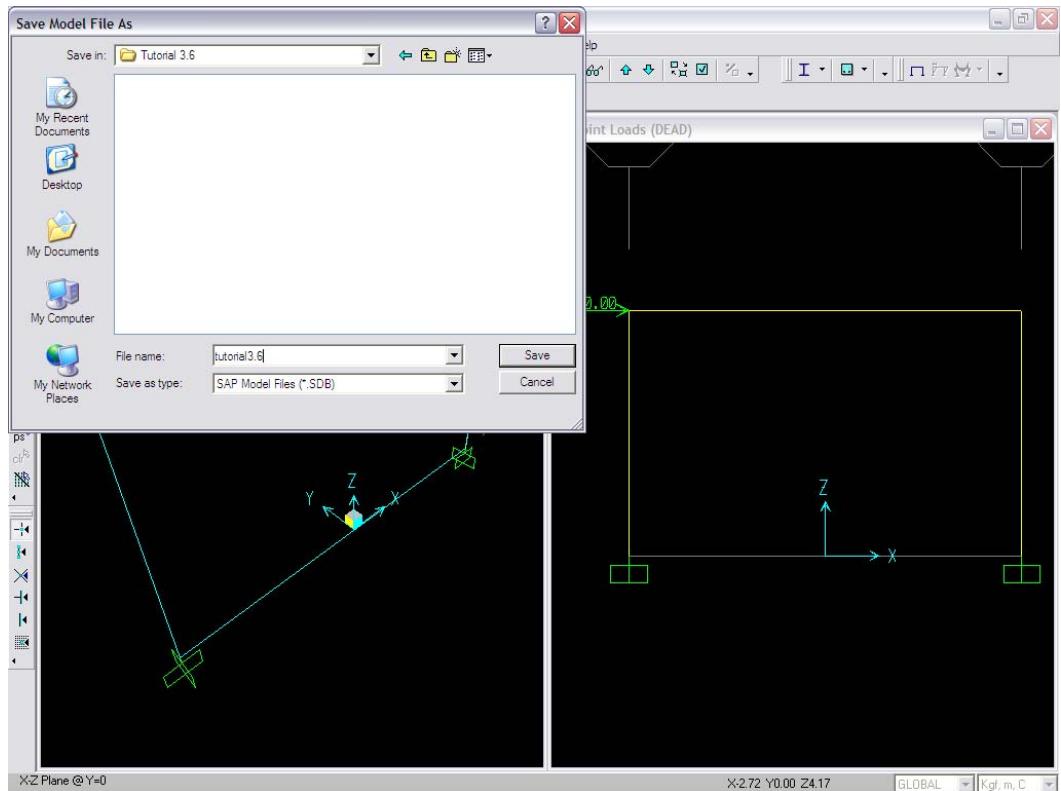
Case Name > Modal > Click > Run/Do Not Run Case > Click [tipos de análisis]

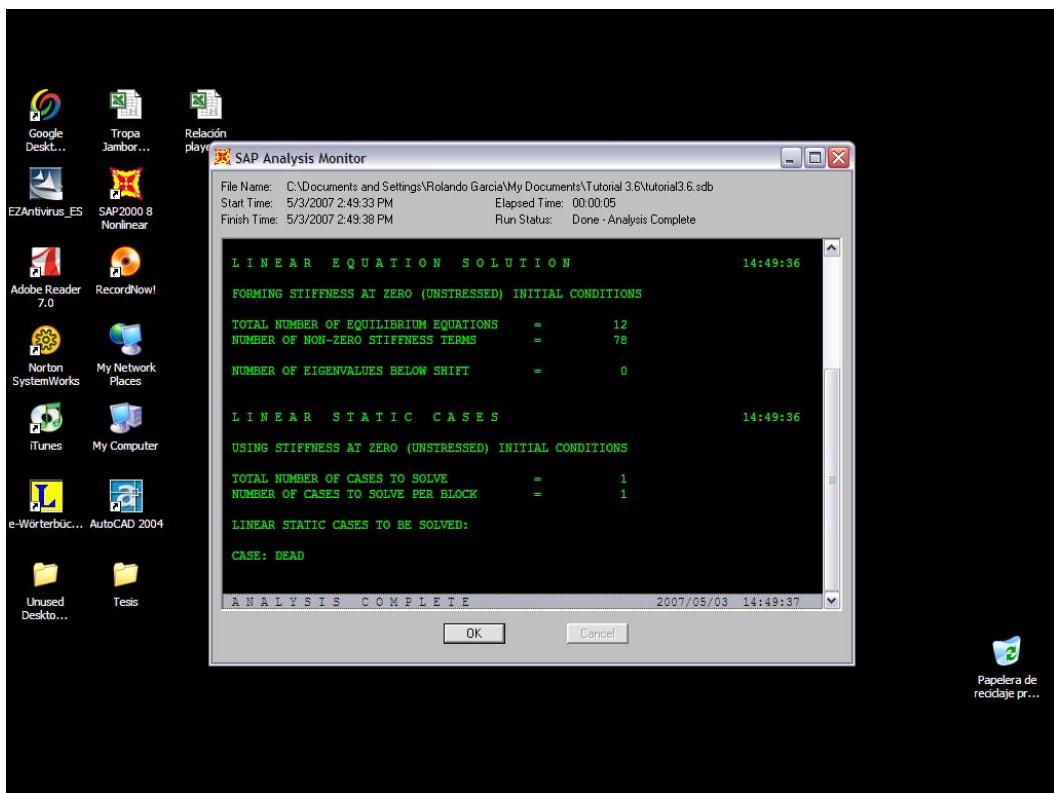


Run Now > Click

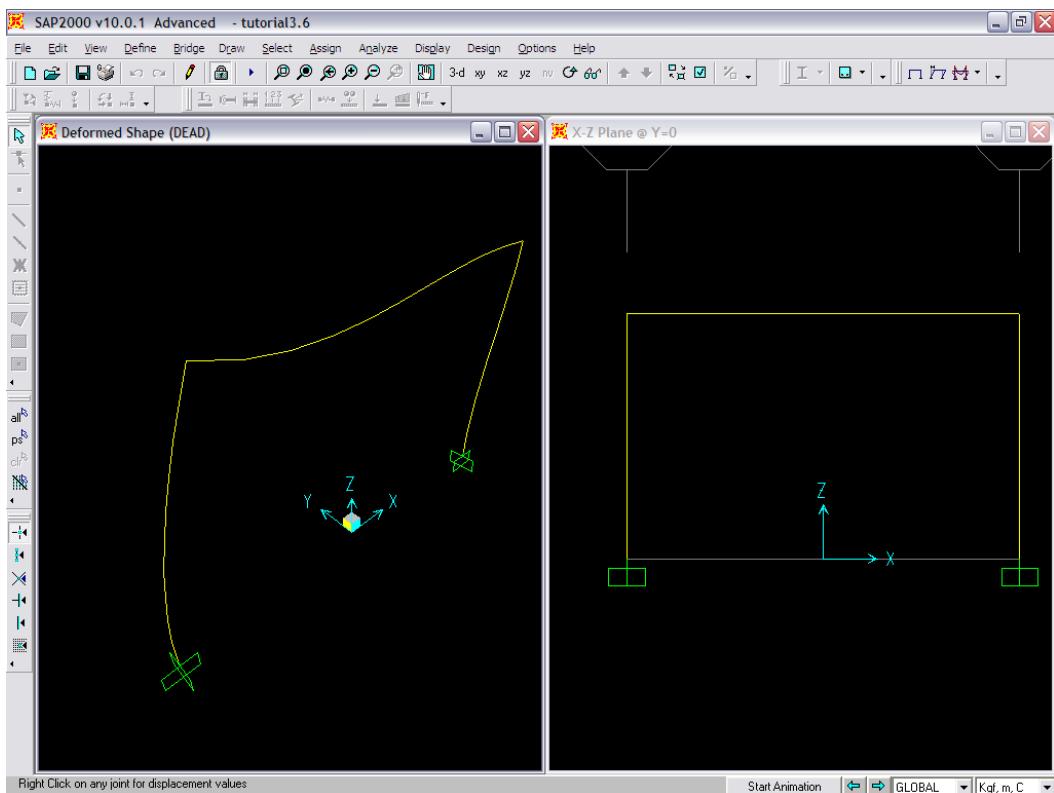
Save Model File As [crear un folder, poner nombre y guardarlo ahí]

Save



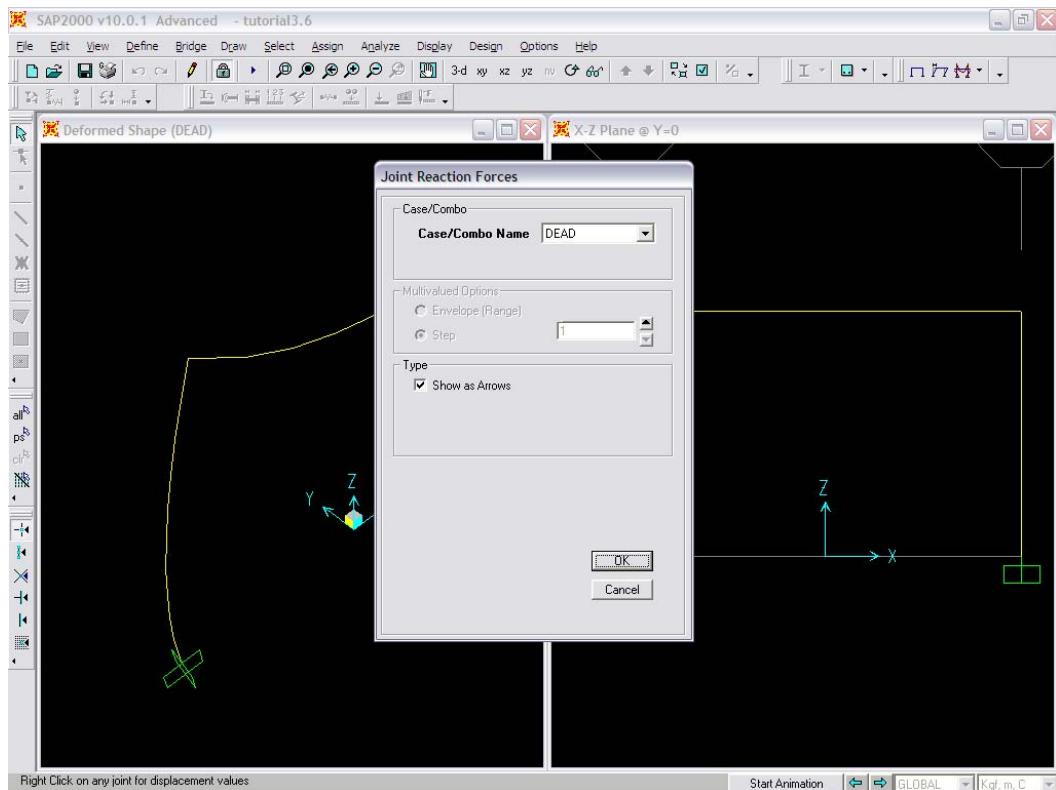
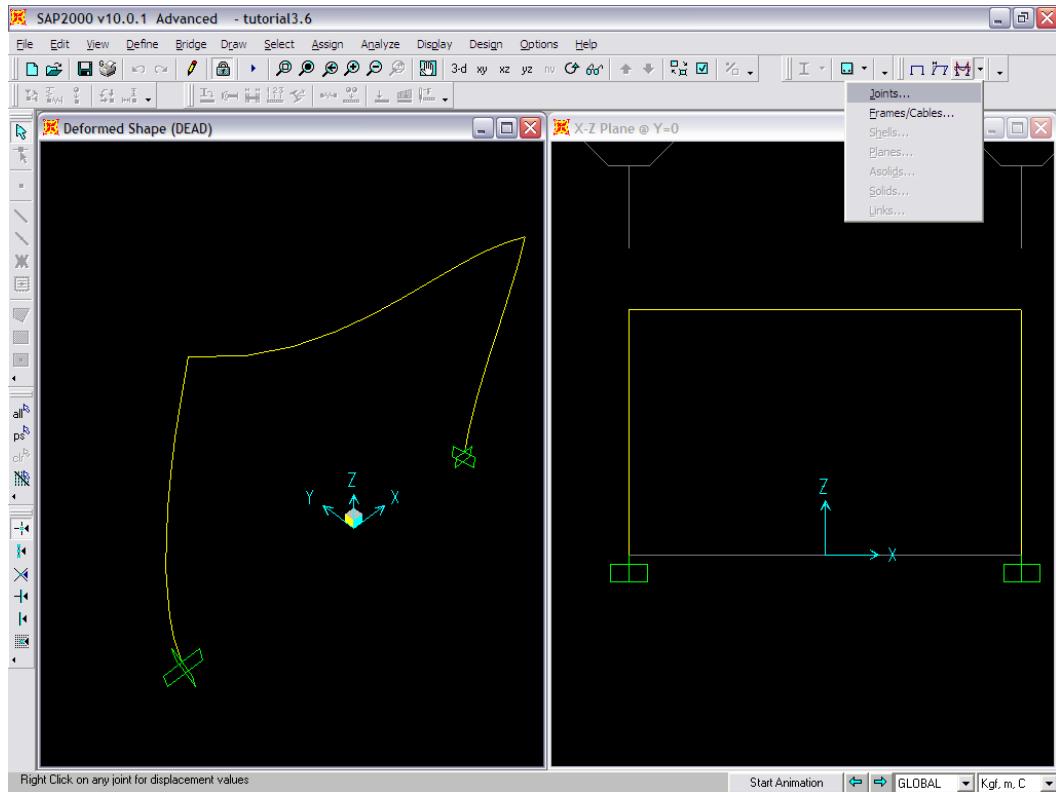


Ok > Aparece Inmediatamente

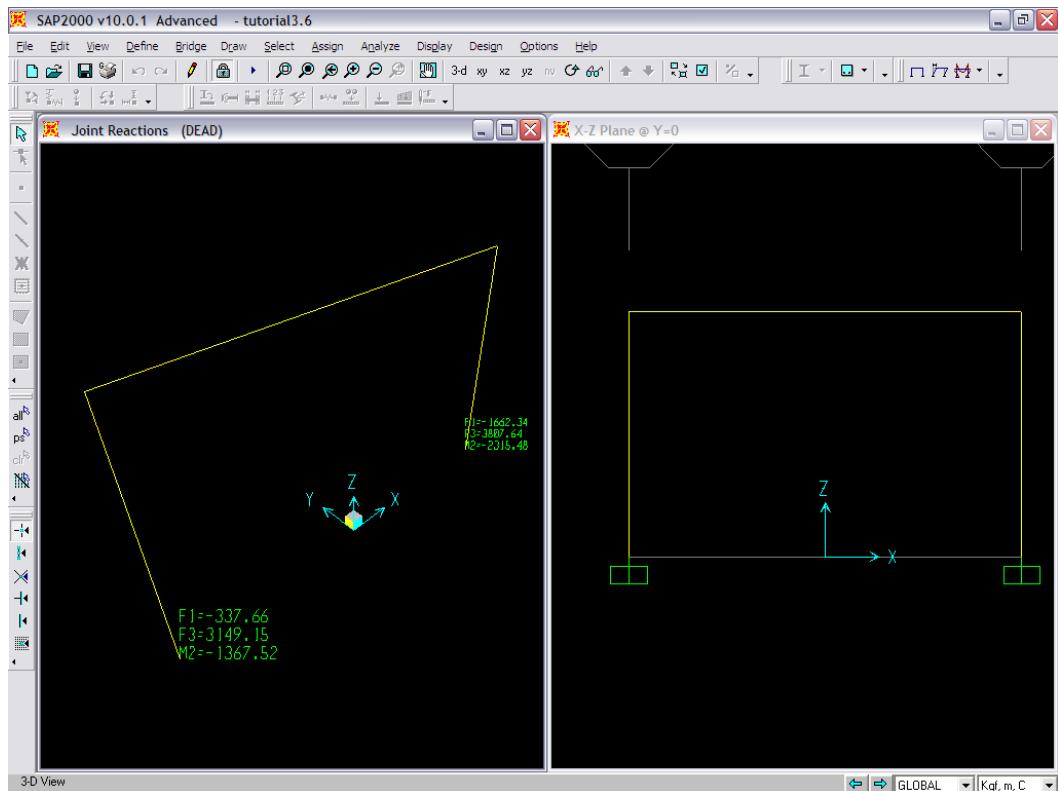
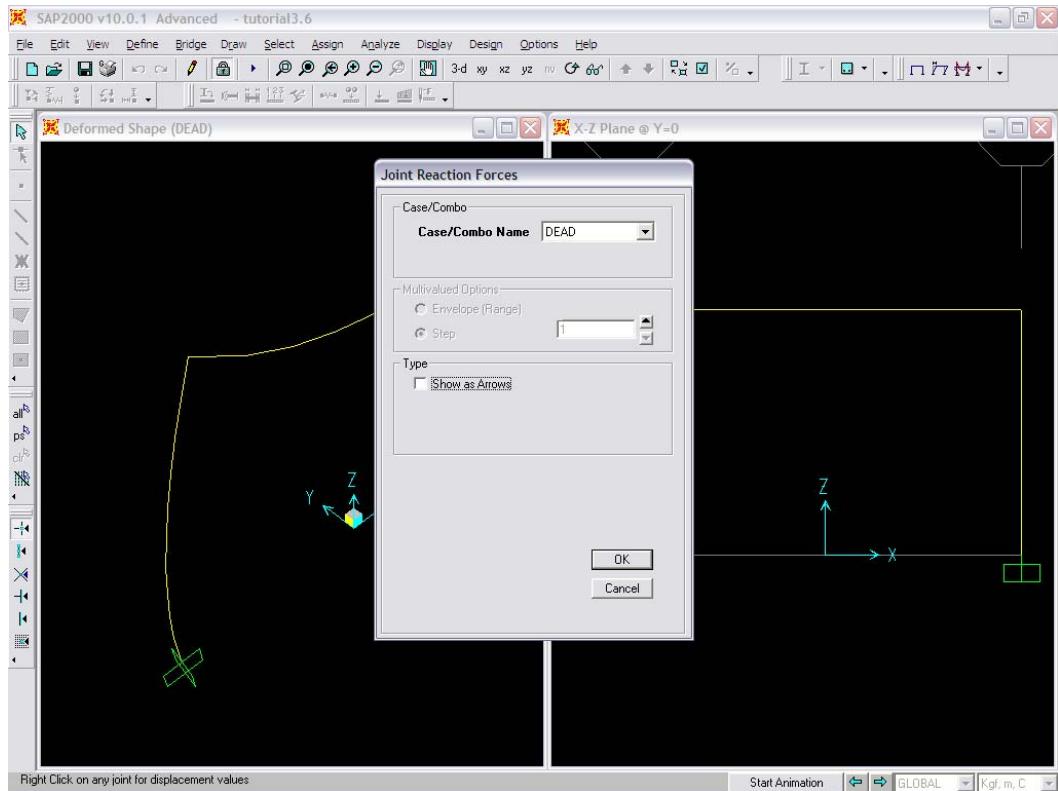


## 7.- REVISAR LOS RESULTADOS

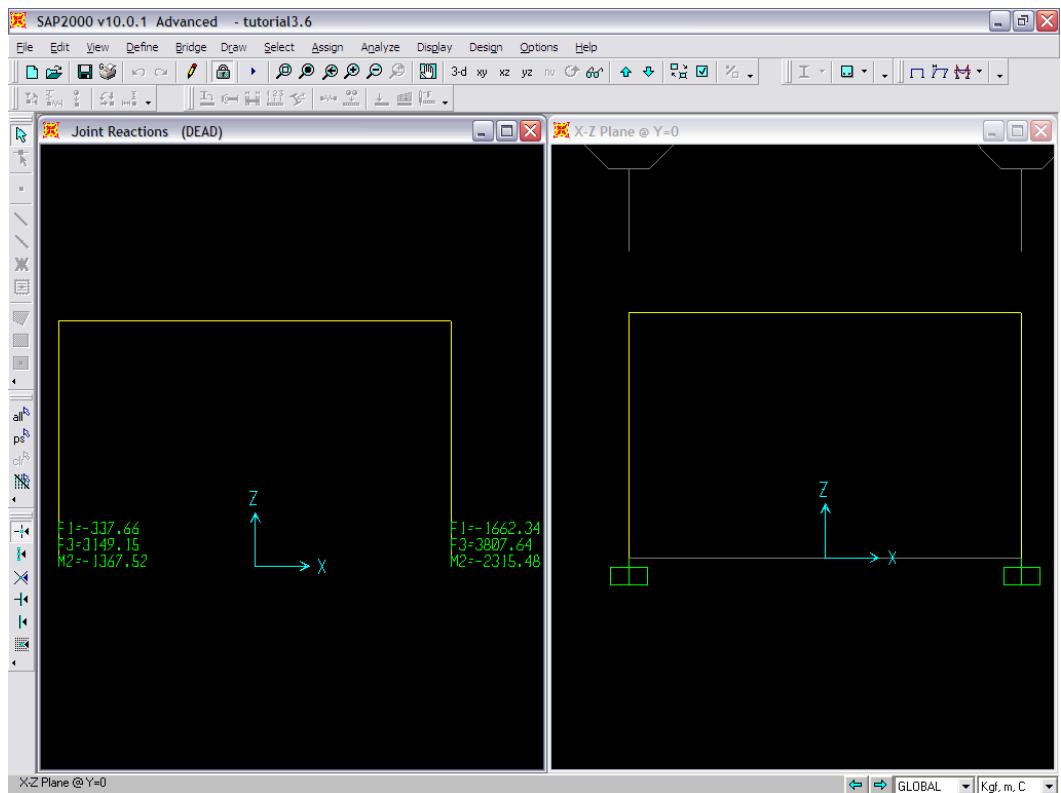
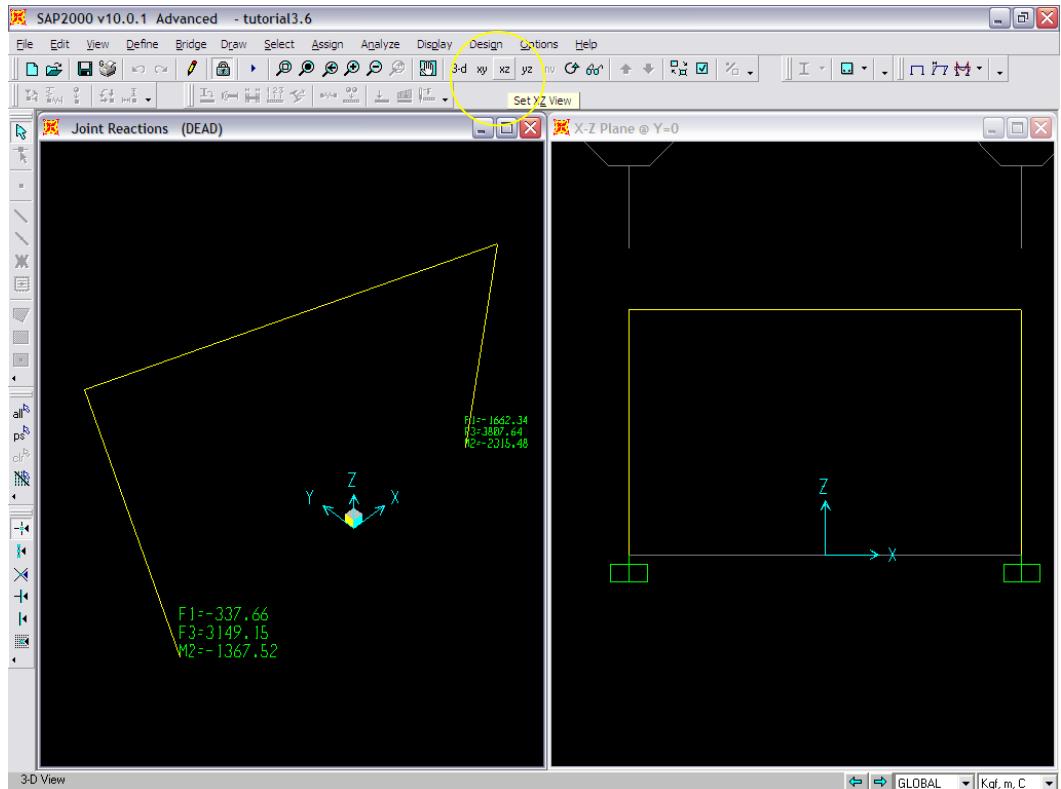
Show Forces/Stresses > Joints



Quitar la paloma en Show as Arrows > Ok



Los resultados aparecen en la ventana izquierda en la vista 3d, para observarlos mejor cambiaremos a la vista xz dando clic.



Así obtenemos los resultados de las fuerzas y momentos de los nodos 1 y 4 del ejemplo 3.6

Nodo 1

$$\begin{aligned} F_1 &= R_1X = -337.66 \text{ kg} \\ F_3 &= R_1Y = 3149.15 \text{ kg} \\ M_2 &= M_1 = -1367.52 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

Nodo 4

$$\begin{aligned} F_1 &= R_4X = -1662.34 \text{ kg} \\ F_3 &= R_4Y = 3807.64 \text{ kg} \\ M_2 &= M_4 = -2315.48 \text{ kg-m} \end{aligned}$$

### 3.4 ELEMENTO TRIANGULAR LÍNEAL

Un elemento triangular lineal tiene lados rectos y tres nodos, uno en cada esquina. El nodo  $i$  se ubica arbitrariamente pero debe seguirse una numeración en el sentido contrario al movimiento del reloj.

Los valores nodales de  $\phi$  son  $\Phi_i, \Phi_j$  y  $\Phi_k$  y las coordenadas nodales son:

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) \\ (x_j, y_j) \\ (x_k, y_k) \end{aligned}$$

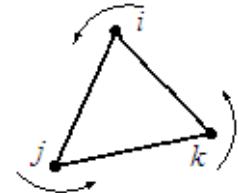


Fig. 3.20 Coordenadas nodales.

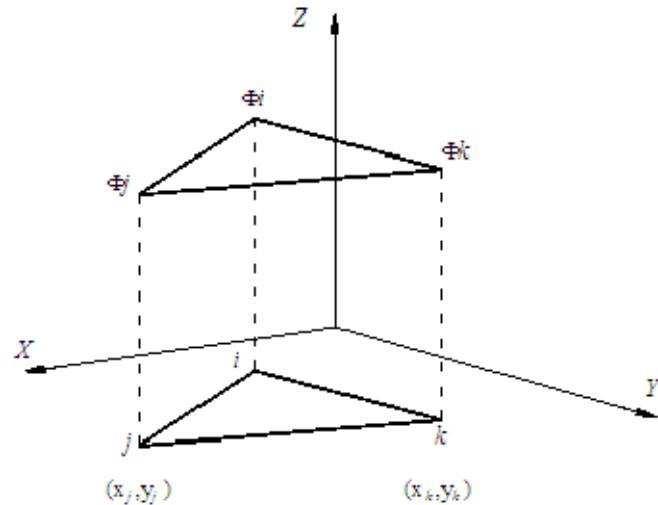


Fig. 3.21 Valores y coordenadas nodales.

El polinomio de interpolación es:

$$\phi = a_1 + a_2x + a_3y \quad (3.83)$$

Las rigideces nodales son:

$$\phi = \Phi_i \quad \text{en} \quad x = x_i \quad y = y_i \quad (3.84)$$

$$\phi = \Phi_j \quad \text{en} \quad x = x_j \quad y = y_j \quad (3.85)$$

$$\phi = \Phi_k \quad \text{en} \quad x = x_k \quad y = y_k \quad (3.86)$$

Sustituyendo:

$$\Phi_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \quad (3.87)$$

$$\Phi_j = a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \quad (3.88)$$

$$\Phi_k = a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k \quad (3.89)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneamente:

$$a_1 = \frac{1}{2A^e} \left[ (x_j y_k - x_k y_j) \Phi_i + (x_k y_i - x_i y_k) \Phi_j + (x_i y_j - x_j y_i) \Phi_k \right] \quad (3.90)$$

$$a_2 = \frac{1}{2A^e} \left[ (y_j - y_k) \Phi_i + (y_k - y_i) \Phi_j + (y_i - y_j) \Phi_k \right] \quad (3.91)$$

$$a_3 = \frac{1}{2A^e} \left[ (x_k - x_j) \Phi_i + (x_i - x_k) \Phi_j + (x_j - x_i) \Phi_k \right] \quad (3.92)$$

Donde el elemento,  $A$  es el área del triángulo.

$$2A^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

Sustituyendo en  $\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y$  (3.83),

$$a_1 = \frac{1}{2A^e} \left[ \alpha_i \Phi_i + \alpha_j \Phi_j + \alpha_k \Phi_k \right] \quad (3.93)$$

$$a_2 = \frac{1}{2A^e} \left[ \beta_i \Phi_i + \beta_j \Phi_j + \beta_k \Phi_k \right] \quad (3.94)$$

$$a_3 = \frac{1}{2A^e} \left[ \gamma_i \Phi_i + \gamma_j \Phi_j + \gamma_k \Phi_k \right] \quad (3.95)$$

Donde:

$$\alpha_i = (x_j y_k - x_k y_j) \quad (3.96)$$

$$\alpha_j = (x_k y_i - x_i y_k) \quad (3.97)$$

$$\alpha_k = (x_i y_j - x_j y_i) \quad (3.98)$$

$$\beta_i = (y_j - y_k) \quad (3.99)$$

$$\beta_j = (y_k - y_i) \quad (3.100)$$

$$\beta_k = (y_i - y_j) \quad (3.101)$$

$$\gamma_i = (x_k - x_j) \quad (3.102)$$

$$\gamma_j = (x_i - x_k) \quad (3.103)$$

$$\gamma_k = (x_j - x_i) \quad (3.104)$$

Se puede observar que las funciones de forma son constantes una vez que se conocen las coordenadas nodales.

En  $\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y$  lo que significa que los valores nodales son función de  $x$  y  $y$ .

$$\phi = \frac{1}{2A^e} [\alpha_i \Phi_i + \alpha_j \Phi_j + \alpha_k \Phi_k] + \frac{1}{2A^e} [\beta_i \Phi_i + \beta_j \Phi_j + \beta_k \Phi_k] x + \frac{1}{2A^e} [\gamma_i \Phi_i + \gamma_j \Phi_j + \gamma_k \Phi_k] y \quad (3.105)$$

Ordenando:

$$\phi = \frac{1}{2A^e} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] \Phi_i + \frac{1}{2A^e} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] \Phi_j + \frac{1}{2A^e} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] \Phi_k \quad (3.106)$$

o bien:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k \quad (3.107)$$

Donde:

$$N_i = \frac{1}{2A^e} [\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y] \quad (3.108)$$

$$N_j = \frac{1}{2A^e} [\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y] \quad (3.109)$$

$$N_k = \frac{1}{2A^e} [\alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y] \quad (3.110)$$

Polinomios lineales una vez que se conocen  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , con funciones de forma en función de  $x$  y  $y$ .

Los gradientes  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  son constantes en todo el elemento, por ejemplo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k \quad (3.111)$$

Pero:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2A^e} \{ \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y \} \right] = \frac{1}{2A^e} [\beta_i] \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A^e} \quad (3.113)$$

Los valores de  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  y  $\gamma_k$  son constantes una vez que se conoce las coordenadas de los nodos.

$\Phi_i$ ,  $\Phi_j$  y  $\Phi_k$  son independientes de las coordenadas espaciales, por lo que su derivada tiene un valor constante.

En gradiente constante en cualquier elemento significa que debe usarse un gran número de elementos para aproximar un rápido cambio de  $\phi$ .

### EJEMPLO 3.7

Evaluar las funciones de forma y calcular el valor de la presión en el punto A. Los valores nodales son  $\Phi_i = 40 \text{ kg/cm}^2$ ;  $\Phi_j = 34 \text{ kg/cm}^2$  y  $\Phi_k = 46 \text{ kg/cm}^2$ . El punto A está situado en (2, 1. 5).

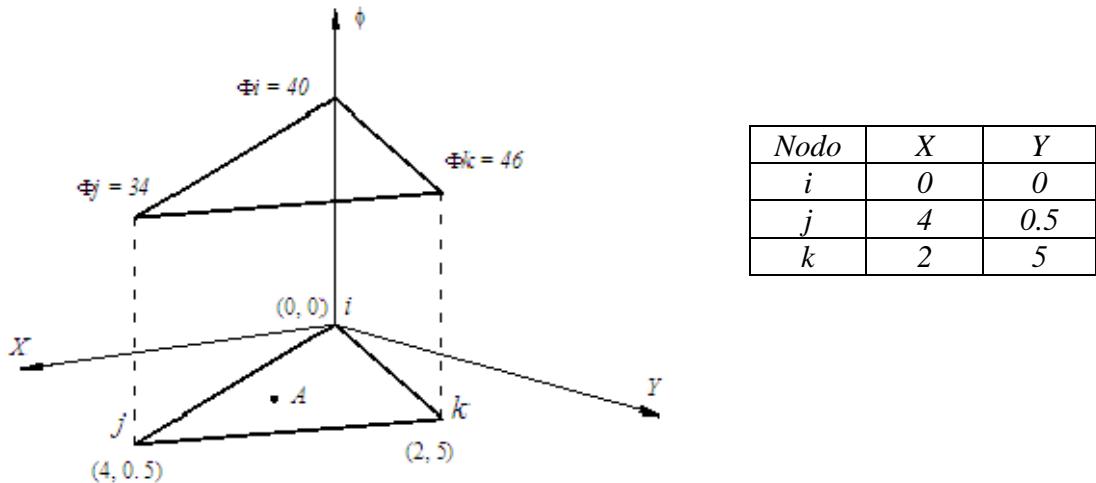


Fig. 3.22 Valores y coordenadas nodales del ejemplo 3.7.

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j = 4(5) - 2(0.5) = 19$$

$$\alpha_j = x_k y_i - x_i y_k = 2(0) - 0(5) = 0$$

$$\alpha_k = x_i y_j - x_j y_i = 0(0.5) - 4(0) = 0$$

$$\beta_i = y_j - y_k = 0.5 - 5 = -4.5$$

$$\beta_j = y_k - y_i = 5 - 0 = 5$$

$$\beta_k = y_i - y_j = 0 - 0.5 = -0.5$$

$$\gamma_i = x_k - x_j = 2 - 4 = -2$$

$$\gamma_j = x_i - x_k = 0 - 2 = -2$$

$$\gamma_k = x_j - x_i = 4 - 0 = 4$$

Determinante:

$$2A^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0.5 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19$$

$$2A^e = 19$$

Sustituyendo en las funciones de forma:

$$N_i = \frac{1}{19} [19 - 4.5x - 2y]$$

$$N_j = \frac{1}{19} [5x - 2y]$$

$$N_k = \frac{1}{19} [-0.5x + 4y]$$

Se debe comprobar que  $N_i + N_j + N_k = 1$

$$\frac{1}{19} [19 - 4.5x - 2y + 5x - 2y - 0.5x + 4y] = 1$$

La ecuación para interpolación es:

$$\phi = [19 - 4.5x - 2y] \frac{1}{19} \Phi_i + [5x - 2y] \frac{1}{19} \Phi_j + [-0.5x + 4y] \frac{1}{19} \Phi_k$$

en  $A (2, 1.5)$

$$\phi = \left(\frac{7}{19}\right)(40) + \left(\frac{7}{19}\right)(34) + \left(\frac{5}{19}\right)(46)$$

$$\phi = 39.40 \text{ kg/cm}^2$$

Se satisface que las funciones de forma varían linealmente a lo largo de los lados entre su nodo y los otros dos nodos, es decir,  $N_i$  varía linealmente a lo largo de los lados  $ij$  y  $ik$ . Una función de forma es cero a lo largo del lado opuesto a su nodo, esto es  $N_i$  es cero a lo largo del lado  $jk$ .

**EJEMPLO 3.8**

Determinar la localización de la línea de contorno de  $42 \text{ kg/cm}^2$  para un elemento triangular del ejemplo anterior.

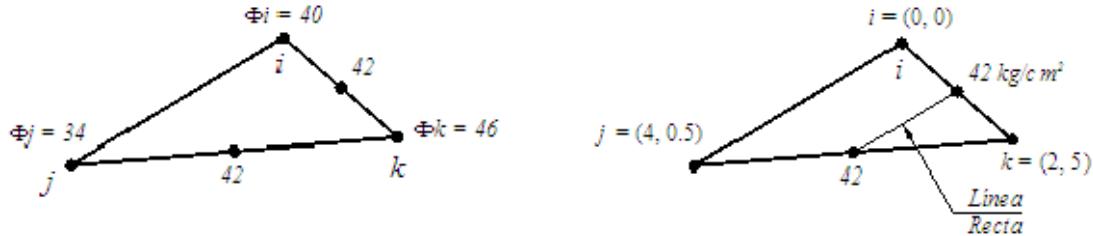


Fig. 3.23 Elemento triangular del ejemplo 3.8.

Se puede ver que la presión para  $42 \text{ kg/cm}^2$  intercepta los lados  $ik$  y  $jk$ .

Para el lado  $jk$

$$\frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{2 - x}{2 - 4}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{2 - x}{-2}$$

$$x = 2.67 \text{ cm}$$

$$\frac{46 - 42}{46 - 34} = \frac{5 - y}{5 - 0.5}$$

$$y = 3.5 \text{ cm}$$

en el lado  $jk$ :  $x = 2.67 \text{ cm}$

$$y = 3.5 \text{ cm}$$

Para el lado  $ik$ :

$$\frac{40 - 42}{40 - 46} = \frac{0 - x}{0 - 2} \quad ; \quad x = 0.666 \text{ cm}$$

$$\frac{40 - 42}{40 - 46} = \frac{0 - y}{0 - 5} \quad ; \quad y = 1.667 \text{ cm}$$

### 3.5 ELEMENTO RECTANGULAR BILINEAL

El elemento rectangular bilineal tiene una longitud  $2b$  y una altura  $2a$ . Los nodos son  $i, j, k$  y  $m$ . El nodo  $i$  siempre se ubica en la esquina inferior izquierda.

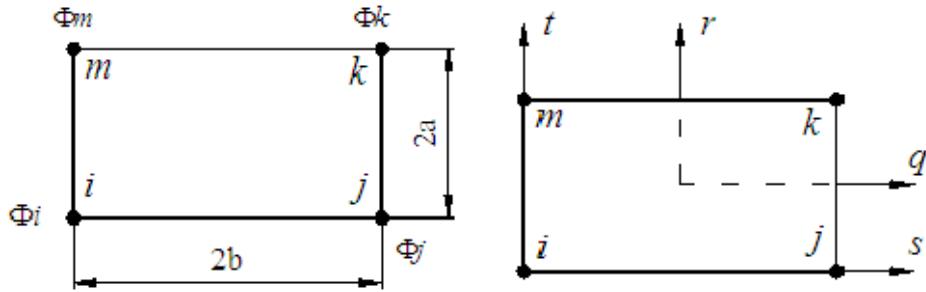


Fig. 3.24 Elemento rectangular bilineal.

La ecuación de interpolación en coordenadas locales  $s$  y  $t$  es:

$$\phi = c_1 + c_2s + c_3t + c_4st \quad (3.114)$$

esta función es lineal en  $s$  a lo largo de cualquier línea constante  $t$  y lineal en  $t$  a lo largo de cualquier línea constante  $s$ .

El sistema coordenado local  $s-t$  tiene su origen en el nodo  $i$ . Evaluando la función de interpolación en los nodos tenemos:

$$s = 0 ; \quad t = 0 ; \quad \Phi_i = c_1 \quad (3.115)$$

$$s = 2b ; \quad t = 0 ; \quad \Phi_j = c_1 + 2bc_2 \quad (3.116)$$

$$s = 2b ; \quad t = 2a ; \quad \Phi_k = c_1 + 2bc_2 + 2ac_3 + 4abc_4 \quad (3.117)$$

$$s = 0 ; \quad t = 2a ; \quad \Phi_m = c_1 + 2ac_3 \quad (3.118)$$

$$\text{De donde: } c_1 = \Phi_i \quad (3.119)$$

$$\text{En } \Phi_j = \Phi_i + 2bc_2 \quad (3.120)$$

$$\text{Despejando } c_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{2b} \quad (3.121)$$

$$\text{En } \Phi_m = \Phi_i + 2ac_3 \quad (3.122)$$

$$\text{Despejando } c_3 = \frac{\Phi_m - \Phi_i}{2a} \quad (3.123)$$

Sustituyendo  $c_1$ ,  $c_2$  y  $c_3$  en:

$$\Phi_k = \Phi_i + 2b \left[ \frac{\Phi_j - \Phi_i}{2b} \right] + 2a \left[ \frac{\Phi_m - \Phi_i}{2a} \right] + 4abc_4 \quad (3.124)$$

$$\text{Despejando: } c_4 = \frac{1}{4ab} [\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m] \quad (3.125)$$

Sustituyendo en

$$\phi = c_1 + c_2 s + c_3 t + c_4 s t \quad (3.126)$$

$$\phi = \Phi_i + \left[ \frac{\Phi_j - \Phi_i}{2b} \right] s + \left[ \frac{\Phi_m - \Phi_i}{2a} \right] t + \frac{1}{4ab} [\Phi_i - \Phi_j + \Phi_k - \Phi_m] s t \quad (3.127)$$

Tomando términos comunes:

$$\phi = \left\{ \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] + \left[ \frac{st}{4ab} - \frac{t}{2a} \right] \right\} \Phi_i + \left\{ \left[ \frac{s}{2b} \right] - \left[ \frac{st}{4ab} \right] \right\} \Phi_j + \left\{ \left[ \frac{st}{4ab} \right] - \left[ \frac{t}{2a} \right] \right\} \Phi_k + \left\{ \left[ \frac{t}{2a} \right] - \left[ \frac{st}{4ab} \right] \right\} \Phi_m \quad (3.128)$$

Que se puede escribir:

$$\phi = \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] \Phi_i + \left[ \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] \Phi_j + \left[ \frac{st}{4ab} \right] \Phi_k + \left[ \frac{t}{2a} \right] \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] \Phi_m \quad (3.129)$$

Donde:

$$\phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k + N_m \Phi_m \quad (3.130)$$

$$N_i = \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] \quad (3.131)$$

$$N_j = \left[ \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] \quad (3.132)$$

$$N_k = \left[ \frac{st}{4ab} \right] \quad (3.133)$$

$$N_m = \left[ \frac{t}{2a} \right] \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] \quad (3.134)$$

Las funciones de forma de un elemento rectangular bilineal tienen propiedades similares a las de un elemento triángulo:

1.- Cada función de forma varía linealmente a lo largo de sus ejes entre su nodo y dos nodos adyacentes, por ejemplo,  $N_i$  varía linealmente a lo largo de los nodos  $ij$  y  $im$ .

2.- Cada función de forma es cero a lo largo de los lados cuyo nodo no toca, por ejemplo,  $N_i$  es cero a lo largo de los lados  $jk$  y  $km$ .

3.- La variación lineal de  $\phi$  a lo largo de los ejes del elemento rectangular y un lado de un elemento triangular significa que esos dos elementos son compatibles y pueden ser usados adyacentemente uno de otro.

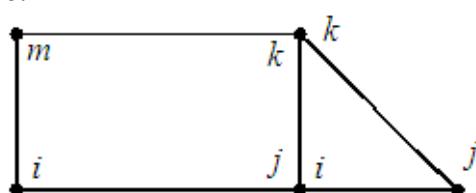


Fig. 3.25 Compatibilidad de elementos.

Otro sistema coordenado popular en el que tiene su origen en el centro del elemento.

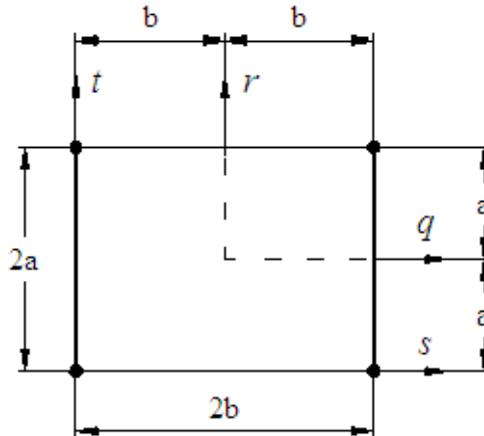


Fig. 3.26 Sistema coordenado con origen en el centro del elemento.

La relación entre ambos sistemas coordenados es:

$$s = b + q$$

$$t = a + r$$

Las funciones de forma son:

$$N_i = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{q}{b} \right] \left[ 1 - \frac{r}{a} \right] \quad (3.135)$$

$$N_j = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{q}{b} \right] \left[ 1 - \frac{r}{a} \right] \quad (3.136)$$

$$N_k = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{q}{b} \right] \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] \quad (3.137)$$

$$N_m = \frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{q}{b} \right] \left[ 1 + \frac{r}{a} \right] \quad (3.138)$$

estas funciones de forma son útiles debido a que permiten que un rectángulo se deforme en un cuadrilátero general.

Para el sistema coordenado natural, la relación entre coordenada es:

$$\zeta = \frac{q}{b} \quad (3.139)$$

$$\eta = \frac{r}{a} \quad (3.140)$$

Donde  $q$  y  $r$  son coordenadas locales.

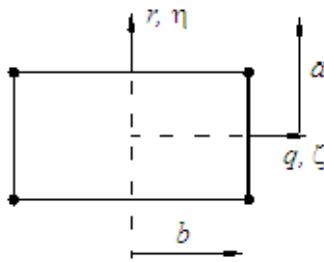


Fig. 3.27 Coordenadas locales q y r.

Este sistema coordenado tiene su origen en el centro del elemento y es conveniente en el caso de realizar integración numérica:

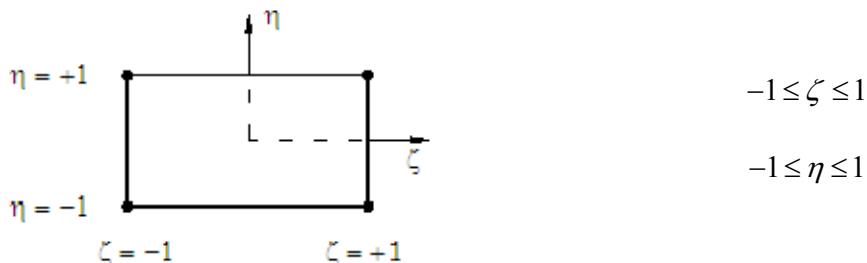


Fig. 3.28 Sistema coordenado con origen en el centro del elemento.

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta) \quad (3.141)$$

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta) \quad (3.142)$$

$$N_k = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta) \quad (3.143)$$

$$N_m = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta) \quad (3.144)$$

Una línea de contorno en un elemento rectangular es generalmente curva, la intersección de la línea de contorno con los ejes se puede obtener por medio de interpolación lineal, el tercer punto se puede obtener haciendo s ó t igual a cero en la ecuación de la función de forma y resolver para otro valor coordenado.

### EJEMPLO 3.9

Determinar los tres puntos de la línea de contorno para 50° C del elemento rectangular mostrado, los valores nodales son:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= 42^\circ C & \Phi_k &= 56^\circ C \\ \Phi_j &= 54^\circ C & \Phi_m &= 46^\circ C \end{aligned}$$

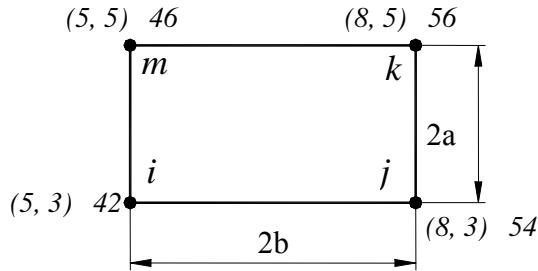


Fig. 3.29 Elemento rectangular del ejemplo 3.9.

Longitudes de los lados:

$$\begin{aligned} 2b &= x_j - x_i \\ 2b &= 8 - 5 = 3 \quad ; \quad 2b = 3 \\ 2a &= y_m - y_i \\ 2a &= 5 - 3 = 2 \quad ; \quad 2a = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en las funciones de forma (3.131,3.132,3.133,3.134):

$$\begin{aligned} N_i &= \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2} \right] \\ N_j &= \left[ \frac{s}{2b} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2a} \right] = \left[ \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{t}{2} \right] \\ N_k &= \left[ \frac{st}{4ab} \right] = \left[ \frac{st}{6} \right] \\ N_m &= \left[ \frac{t}{2a} \right] \left[ 1 - \frac{s}{2b} \right] = \left[ \frac{t}{2} \right] \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \end{aligned}$$

La línea de  $50^{\circ}\text{C}$  intersecta los nodos  $ij$  y  $mk$ . Por lo que suponemos los valores de  $t$  y calculamos los de  $s$ .

1) A lo largo de los nodos  $ij$  ;  $t = 0$

$$\begin{aligned} N_i &= \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \\ N_j &= \left[ \frac{s}{3} \right] \\ N_k &= 0 \\ N_m &= 0 \end{aligned}$$

$$\phi = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \Phi_i + \left[ \frac{s}{3} \right] \Phi_j = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] (42) + \left[ \frac{s}{3} \right] (54) = 50$$

$$42 - \frac{42}{3}s + \frac{54}{3}s = 50$$

$$4s = 8 \quad s = 2$$

$$t = 0$$

2) A lo largo del lado  $mk$ ,  $t = 2a = 2$

$$N_i = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{2}{2} \right] = 0$$

$$N_j = \left[ \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{2}{2} \right] = 0$$

$$N_k = \frac{st}{6} = \frac{s(2)}{6} = \frac{s}{3}$$

$$N_m = \left[ \frac{t}{2} \right] \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] = \left[ \frac{2}{2} \right] \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right]$$

$$\phi = \frac{s}{3} \Phi_k + \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \Phi_m = \frac{s}{3} (56) + \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] (46) = 50$$

$$\frac{56}{3}s - \frac{46}{3}s + 46 = 50$$

$$s = 1.20$$

$$t = 2.0$$

Para el tercer punto, suponemos que  $t = a = 1$  (centro del elemento)

$$\phi = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] \Phi_i + \left[ \frac{s}{3} \right] \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] \Phi_j + \frac{s}{6} \Phi_k + \left[ \frac{1}{2} \right] \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \Phi_m$$

$$50 = \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] \left[ \frac{1}{2} \right] (42) + \left[ \frac{s}{3} \right] \left[ \frac{1}{2} \right] (54) + \frac{s}{6} (56) + \left[ \frac{1}{2} \right] \left[ 1 - \frac{s}{3} \right] (46)$$

$$50 = 21 - \frac{21}{3}s + 9s + \frac{56}{6}s + 23 - \frac{23}{3}s$$

$$50 = 44 + \frac{11}{3}s$$

$$s = 1.64$$

$$t = 1$$

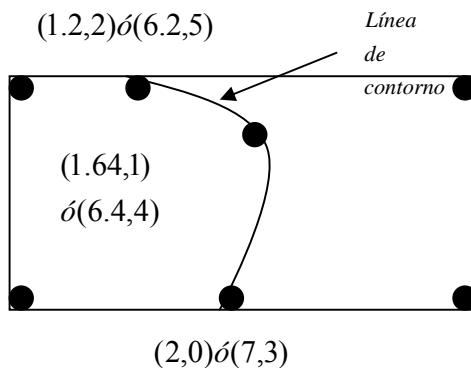


Fig. 3.30 Línea de contorno del ejemplo 3.9.

### 3.6 DEFORMACIONES PLANAS

El estado de deformaciones planas ocurre en miembros que no son libres de expandirse en la dirección perpendicular al plano de aplicación de la carga. Si suponemos que la carga aplicada se encuentra en el plano x-y, entonces los desplazamientos  $w$  que se presentan en la dirección z son cero, y los desplazamientos  $u$  y  $v$  son función únicamente de x y y.

Este conjunto de desplazamientos hace que las deformaciones  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  y que  $\varepsilon_z$  sea constante o cero.

El tensor de deformaciones es:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Son ejemplos de deformaciones planas: un túnel, una tubería a presión interna, una presa de gravedad, etc.

### 3.7 ESFUERZOS PLANOS

Otro caso de interés se presenta si restringimos todos los esfuerzos actuando en un solo plano. Lo anterior es similar al caso de deformaciones planas, aunque los esfuerzos  $\sigma_x$  son cero, los valores de  $\varepsilon_z$  no son necesariamente constantes. Por tanto, las secciones transversales pueden no permanecer planas y el estado de esfuerzos planos se convierte en un problema de deformaciones tridimensionales.

Un estado de esfuerzos planos existe cuando un cuerpo elástico es delgado y no hay cargas aplicadas en la dirección paralela al espesor. Cuando la carga es aplicada en el plano x-y las componentes de los esfuerzos asociadas con las direcciones del espesor  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  son muy pequeñas y por tanto se pueden suponer igual a cero.

Son ejemplo de esfuerzos planos: una viga peraltada, una pieza sometida a tensión, etc.

El tensor de esfuerzos es:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

### 3.8 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Para un material isotrópico, la matriz constitutiva que relaciona los esfuerzos con las deformaciones, para el caso de Esfuerzos planos es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

y para el caso de deformaciones planas:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Ambas expresiones se denotan:

$$[\sigma] = [D][\epsilon]$$

donde  $[D]$  es la matriz constitutiva del material y siempre contiene términos constantes que son reflejo de las propiedades del material.

### 3.9 ELEMENTO TRIANGULAR

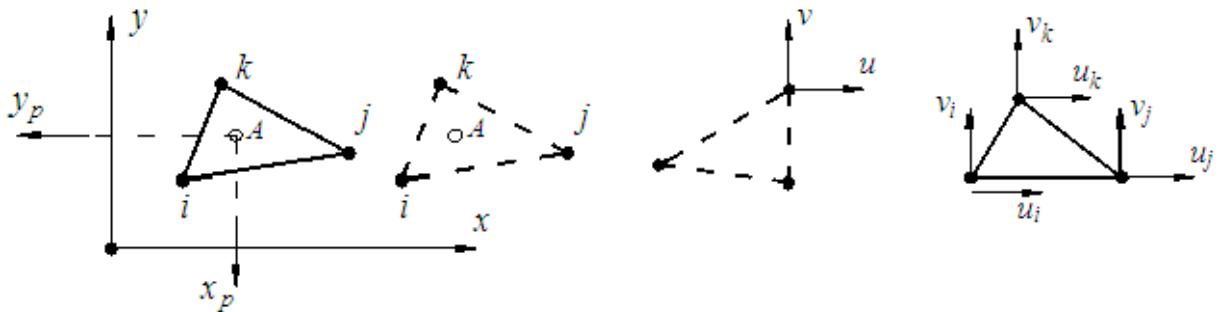


Fig. 3.31 Componentes de desplazamiento.

El desplazamiento de un punto A, para el caso de esfuerzos planos, se puede representar por los componentes de sus desplazamientos en las direcciones  $x$ - $y$ ;  $u$  y  $v$ ; así cada nodo tiene dos componentes de desplazamiento y el numero total de componentes de desplazamiento es de 6, lo anterior se puede observar en la figura (3.31).

Como  $u$  y  $v$  son independientes uno de otro, los coeficientes de las funciones de interpolación no deben ser los mismos. Así podemos proponer un polinomio de interpolación lineal para cada componente de desplazamientos.

Se había visto que  $\phi = a_1 + a_2x + a_3y$ ; donde  $\phi$  es el valor nodal o incógnita.

$$\text{por nodo: } u = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y \quad (3.145)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5x + \alpha_6y \quad (3.146)$$

Los desplazamientos son independientes, se pueden expresar:

$$\{a^e\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Para el total de nodos:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = [c^e]\{\alpha\} \quad (3.148)$$

Lo anterior implica que los valores de  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_e$  son los mismos para cada nodo y por tanto el elemento es indeformable en sus lados que temporalmente podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \{\alpha\} \quad (3.149)$$

Invirtiendo la matriz y despejando:

$$\{a^e\} = [c^e]\{\alpha\} \quad (3.150)$$

$$[c^e]^{-1}\{a^e\} = [c^e]^{-1}[c^e]\{\alpha\} \quad (3.151)$$

$$\{\alpha\} = [c^e]^{-1}\{a^e\} \quad (3.152)$$

↑      ↑  
coef. incógnitas      grados de libertad

$$\{\alpha\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) & 0 & 0 & 0 \\ (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) & 0 & 0 & 0 \\ (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_j y_k - x_k y_j) & (x_k y_i - x_i y_k) & (x_i y_j - x_j y_i) \\ 0 & 0 & 0 & (y_j - y_k) & (y_k - y_i) & (y_i - y_j) \\ 0 & 0 & 0 & (x_k - x_j) & (x_i - x_k) & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

Donde  $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$  área del triangulo i-j-k (3.154)

Organizando:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & 0 & (x_k y_i - x_i y_k) & 0 & (x_i y_j - x_j y_i) & 0 \\ (y_j - y_k) & 0 & (y_k - y_i) & 0 & (y_i - y_j) & 0 \\ (x_k - x_j) & 0 & (x_i - x_k) & 0 & (x_j - x_i) & 0 \\ 0 & (x_j y_k - x_k y_j) & 0 & (x_k y_i - x_i y_k) & 0 & (x_i y_j - x_j y_i) \\ 0 & (y_j - y_k) & 0 & (y_k - y_i) & 0 & (y_i - y_j) \\ 0 & (x_k - x_j) & 0 & (x_i - x_k) & 0 & (x_j - x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

$$\{\alpha\} = [c^e]^{-1} \{a^e\} \quad (3.156)$$

Como:  $u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$  (3.145)

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 \quad (3.158)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 \quad (3.159)$$

Cálculo de deformaciones, caso esfuerzos planos

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$$[\in] = [Q]\{\alpha\} \quad (3.161)$$

$$[\in] = [Q] \left[ c^e \right]^{-1} \{a^e\} \quad (3.162)$$

$$[\in] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_j - y_k) & 0 & (y_k - y_i) & 0 & (y_i - y_j) & 0 \\ 0 & (x_k - x_j) & 0 & (x_i - x_k) & 0 & (x_j - x_i) \\ (x_k - x_j) & (y_j - y_k) & (x_i - x_k) & (y_k - y_i) & (x_j - x_i) & (y_i - x_i) \end{bmatrix} \{a^e\} \quad (3.163)$$

$$[\in] = [B] \{a^e\} \quad (3.164)$$

$$\text{Otra forma ó bien como: } \left. \begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned} \right\} \text{ Por nodo} \quad (3.165)$$

$$[u] = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.166)$$

$$\text{Con} \quad N_i = \frac{1}{2A^e} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i=1,2,3 \quad (3.167)$$

Como anteriormente se definió

$$N_i = \frac{1}{2\gamma_{4e}} [\alpha_1 + \beta_i x + \gamma_i y] \quad i=1,2,3 \quad (3.168)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \quad (3.169)$$

$$\in_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} v_3 \quad (3.170)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial y} u_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} v_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} u_2 + \frac{\partial N_2}{\partial x} v_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} u_3 + \frac{\partial N_3}{\partial x} v_3 \quad (3.171)$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

$$[\epsilon] = [B] \{a^e\} \quad (3.173)$$

$$\text{donde: } [B] = [B_1, B_2, B_3] \quad (3.174)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de deformaciones del nodo } i. \quad (3.175)$$

$$N_1 = \frac{1}{2A} [a_1 + b_1 x + c_1 y] \quad (3.176)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} [a_2 + b_2 x + c_2 y] \quad (3.177)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} [a_3 + b_3 x + c_3 y] \quad (3.178)$$

$$[B] = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

y por consiguiente:

$$B_i = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.180)$$

$[B]$  es una matriz de constantes y por tanto las deformaciones son constantes a través del elemento.

$$b_1 = (y_j - y_k) \quad c_1 = (x_k - x_j) \quad (3.181)$$

$$b_2 = (y_k - y_i) \quad c_2 = (x_i - x_k) \quad (3.182)$$

$$b_3 = (y_i - y_j) \quad c_3 = (x_j - x_i) \quad (3.183)$$

Campo de esfuerzos:

$$[\sigma] = [D][\epsilon] = [D][B]\{a^e\} \quad (3.184)$$

Los esfuerzos también son constantes a través del elemento. Si existen deformaciones iniciales y/o esfuerzos iniciales.

$$[\sigma] = [D][B]\{a^e\} - [D][\epsilon_0] + [\sigma_0] \quad (3.185)$$

Para:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [D][\epsilon] \quad (3.186)$$

donde:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

Esfuerzos planos

Deformaciones planas

$$d_{11} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad d_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$d_{12} = \nu d_{11} \quad d_{22} = d_{11} \quad (3.188)$$

$$d_{21} = \nu d_{11} \quad d_{12} = d_{21} = d_{11} \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$d_{22} = d_{11} \quad d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

$$d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

La matriz elemental de rigidez es:

$$[k^e] = \int_{v_{01}} [B]^T [D] [B] dv$$

Para un elemento en particular  $[B]$  es constante y para un espesor  $t$ , constante en el elemento.

$$[k^e] = [B]^T [D] [B] t \int dx dy$$

$$[k^e] = At [B]^T [D] [B]$$

$A$  es el área del elemento triángulo.

$$\int_v [B]^T [D] [B] dv = At [B]^T [D] [B]$$

$$[k^e] = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3.189)$$

#### EJEMPLO 3.10

Determine los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos para la viga en cantiliver cargada como se muestra en la figura (3.32).

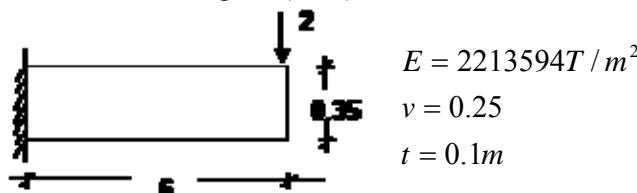


Fig. 3.32 Viga en cantiliver.

Se divide la viga en dos elementos triángulos con el número de nodos siguientes:

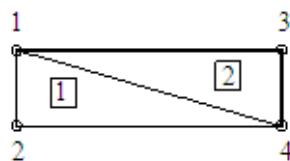


Fig. 3.33 Topología de la viga.

Coordenadas de los nodos:

Nodo	x	y
1	0	0.35
2	0	0
3	6	0.35
4	6	0

ELEMENTO	Nodo		
	i	j	k
1	1	2	4
2	1	4	3

Condiciones de frontera:

$$u_1 = v_1 = 0$$

$$u_2 = v_2 = 0$$

$$F_{3y} = -2$$

Incógnitas:

Desplazamientos  $u_3, v_3, u_4, v_4$

Reacciones  $R_{1x}, R_{1y}, R_{2y}, R_{2x}$

Área de los elementos

**elemento 1**

$$2A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.35 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 2.1 \quad A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = 1.05$$

**elemento 2**  $A_2 = 1.05$

Matrices elementales:

<b>Elemento 1</b>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	
	1 (0,0,35)	2 (0,0)	4 (6,0)	nodos coordenadas

$$b_i = y_j - y_k = 0 \quad c_i = x_k - x_j = 6$$

$$b_j = y_k - y_i = -0.35 \quad c_j = x_i - x_k = -6$$

$$b_k = y_i - y_j = 0.35 \quad c_k = x_j - x_i = 0$$

$$[B] = \frac{1}{2.1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.35 & 0 & 0.35 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & -0.35 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$\text{Esfuerzos planos} \quad E = 2213594 \text{ (T/m}^2\text{)}$$

$$d_{11} = E / (1 - v^2) = 2361166.93$$

$$d_{12} = v d_{11} = 590291.73$$

$$d_{21} = v d_{11} = 590291.73$$

$$d_{22} = d_{11} = 2361166.93$$

$$d_{33} = E / 2 (1 + v) = 885437.60$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Deformaciones planas}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2361166.93 & 590291.73 & 0 \\ 590291.73 & 2361166.93 & 0 \\ 0 & 0 & 885437.60 \end{bmatrix}$$

$$[k^e] = [B]^T [D] [B] t A$$

$$[k^e]_l = (0.1)(1.05) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.86 \\ 0 & 2.86 & 0 \\ -0.17 & 0 & -2.86 \\ 0 & -2.86 & -0.17 \\ 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2361166.93 & 590291.733 & 0 \\ 590291.733 & 2361166.93 & 0 \\ 0 & 0 & 885437.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.17 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 2.86 & 0 & -2.86 & 0 & 0 \\ 2.86 & 0 & -2.86 & 0.17 & 0 & 0 \\ 0 & -2.86 & 0 & 0 & -0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0.17 & 0 & 0 & -0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.17 \end{bmatrix}$$

$$[k^e]_l = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_4 & v_4 \\ 76046551 & 0 & -76046551 & -4520250 & 0 & 4520250 \\ 0 & 20279061 & -3013500 & -20279061 & 3013500 & 0 \\ -76046551 & -3013500 & 76763047 & 7533749 & -716496 & -4520250 \\ -4520250 & -20279061 & 7533749 & 203059317 & -3013500 & -268686 \\ 0 & 3013500 & -716496 & -3013500 & 716496 & 0 \\ 4520250 & 0 & -4520250 & -268686 & 0 & 268686 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Elemento 2	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	
	1 (0,0.35)	4 (6,0)	3 (6,0.35)	nodos coordenadas

$$b_i = -0.35 \quad c_i = 0$$

$$b_j = 0 \quad c_j = -6$$

$$b_k = 0.35 \quad c_k = 6$$

$$[B] = \frac{1}{2.1} \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & -0.35 & -6 & 0 & 6 & 0.35 \end{bmatrix}$$

$$[k^e]_2 = [B]^T [D] [B] t A$$

$$[k^e]_2 = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \\ 7164.96 & 0 & 0 & 30135.00 & -7164.96 & -30135.00 \\ 0 & 2686.86 & 45202.50 & 0 & -45202.50 & -2686.86 \\ 0 & 45202.50 & 760465.51 & 0 & -760465.51 & -45202.50 \\ 30135.00 & 0 & 0 & 2027907.17 & -30135.00 & -2027907.17 \\ -7164.96 & -45202.50 & -760465.51 & 30135.00 & 767630.47 & 75337.49 \\ -30135.00 & -2686.86 & -45202.50 & -2027907.17 & 75337.49 & 202059403 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez total:

$$[k] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 767630.47 & 0 & -760465.51 & -45202.50 & -7164.96 & -30135.00 & 0 & 75337.49 \\ 0 & 2030593.17 & 30135.00 & -2027906.31 & -45202.50 & -2686.86 & 75337.49 & 0 \\ -760465.51 & -30135.00 & 767630.47 & 75337.49 & 0 & 0 & -7164.96 & -45202.50 \\ -45202.50 & -2027906.31 & 75337.49 & 2030593.17 & 0 & 0 & -30135.00 & -2686.86 \\ -7164.96 & -45202.50 & 0 & 0 & 767630.47 & 75337.49 & -760465.51 & -30135.00 \\ 30135.00 & -2686.86 & 0 & 0 & 75337.49 & 203059403 & -45202.50 & -2027907.17 \\ 0 & 75337.49 & -7164.96 & -30135.00 & -760465.51 & -45202.50 & 767630.47 & 0 \\ 75337.49 & 0 & -45202.50 & -2686.86 & -30135.00 & -2027907.17 & 0 & 203059403 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$v_2 = 0$$

Relación fuerza desplazamiento  $[k]\{u\} = \{P\}$

$$\begin{bmatrix} 76763047 & 7533749 & -76046551 & -3013500 \\ 7533749 & 203059403 & -4520250 & -202790717 \\ -76046551 & -4520250 & 76763047 & 0 \\ 3013500 & -202790717 & 0 & 203059403 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000727 & -0.0000124 & -0.0000713 & -0.0000113 \\ -0.0000124 & 0.0003713 & 0.0000095 & 0.0003706 \\ 0.0000713 & 0.0000095 & 0.0000725 & 0.0000106 \\ -0.0000113 & 0.0003706 & 0.0000106 & 0.0003704 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000248 \\ -0.0007426 \\ -0.0000191 \\ -0.0007412 \end{bmatrix}$$

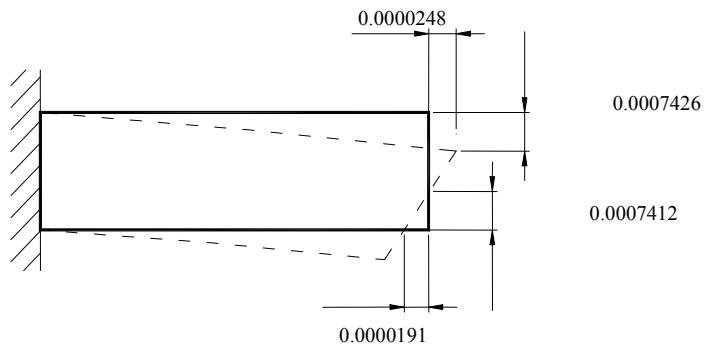


Fig. 3.34 Desplazamientos de la viga en cantiliver.

$$\text{Desplazamiento Vertical Promedio} \quad \frac{0.0007426 + 0.0007412}{2} = 0.0007419$$

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(2)(6)^3(12)}{3(2213594)(0.1)(0.35)^3} = 0.18$$

$$0.18 \neq 0.0007419$$

Que puede mejorarse la aproximación refinando la malla.

$$\text{Esfuerzos:} \quad [\sigma] = [D][B]\{a^e\}$$

### Elemento 1

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2361166933 & 5902917333 & 0 \\ 5902917333 & 2361166933 & 0 \\ 0 & 0 & 8854376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.17 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 2.86 & 0 & -2.86 & 0 & 0 \\ 2.86 & 0 & -2.86 & -0.17 & 0 & 0.17 \\ -0.17 & 0 & -2.86 & 0 & 2.86 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000191 \\ 0 & 0 & 0 & -2.86 & 0 & -0.0007412 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7.6667 \\ -1.9166 \\ -111.5687 \end{bmatrix}$$

### Elemento 2

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2361166933 & 5902917333 & 0 \\ 5902917333 & 2361166933 & 0 \\ 0 & 0 & 8854376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.17 & 0 & 0 & 0 & 0.17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.86 & 0 & 2.86 \\ 0 & 0 & -0.17 & -2.86 & 0 & 2.86 \\ -0.17 & 0 & -2.86 & 0 & 2.86 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0000191 \\ 0 & 0 & 0 & -2.86 & 0 & -0.0007412 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.5911 \\ -6.9654 \\ 0.0000248 \\ -0.6091 \\ -0.0007426 \end{bmatrix}$$

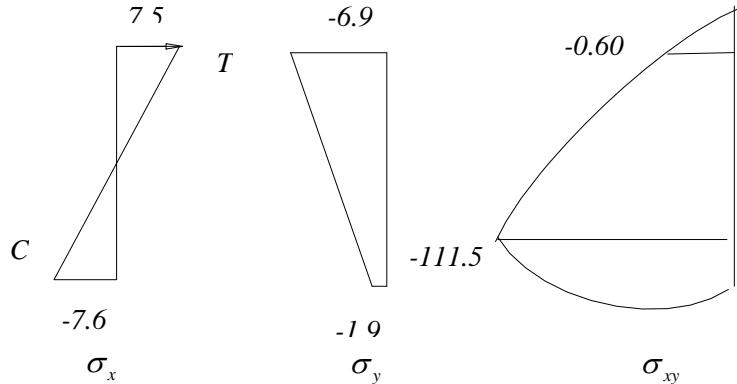


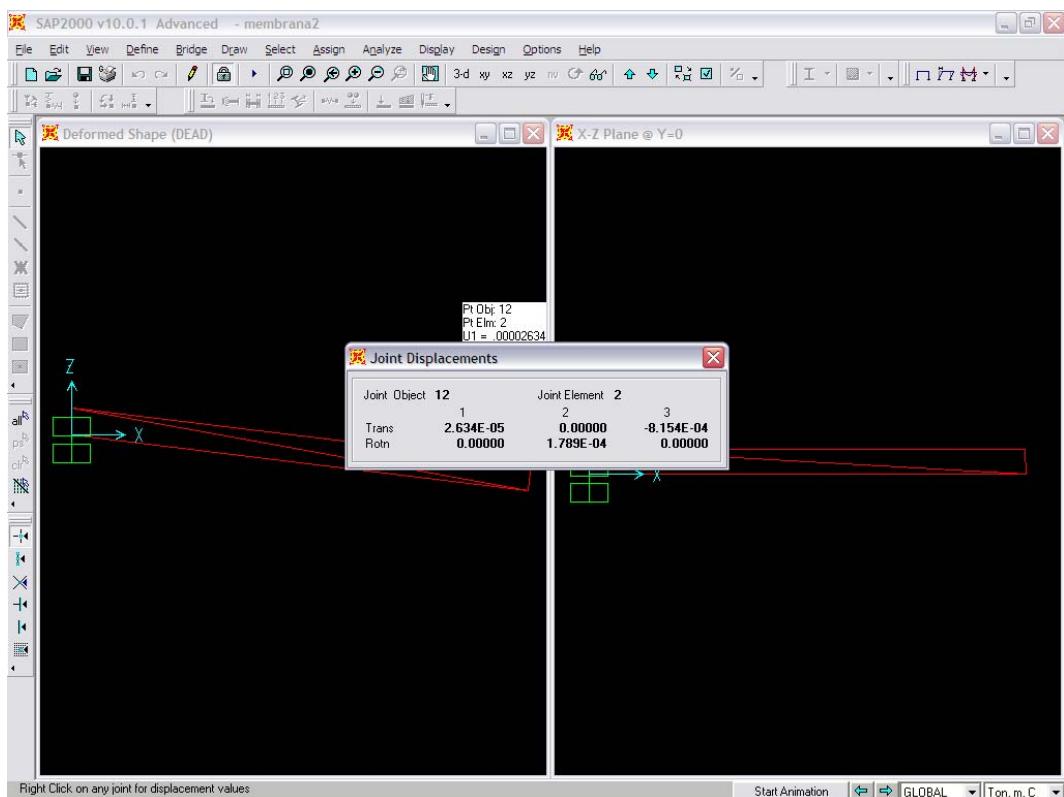
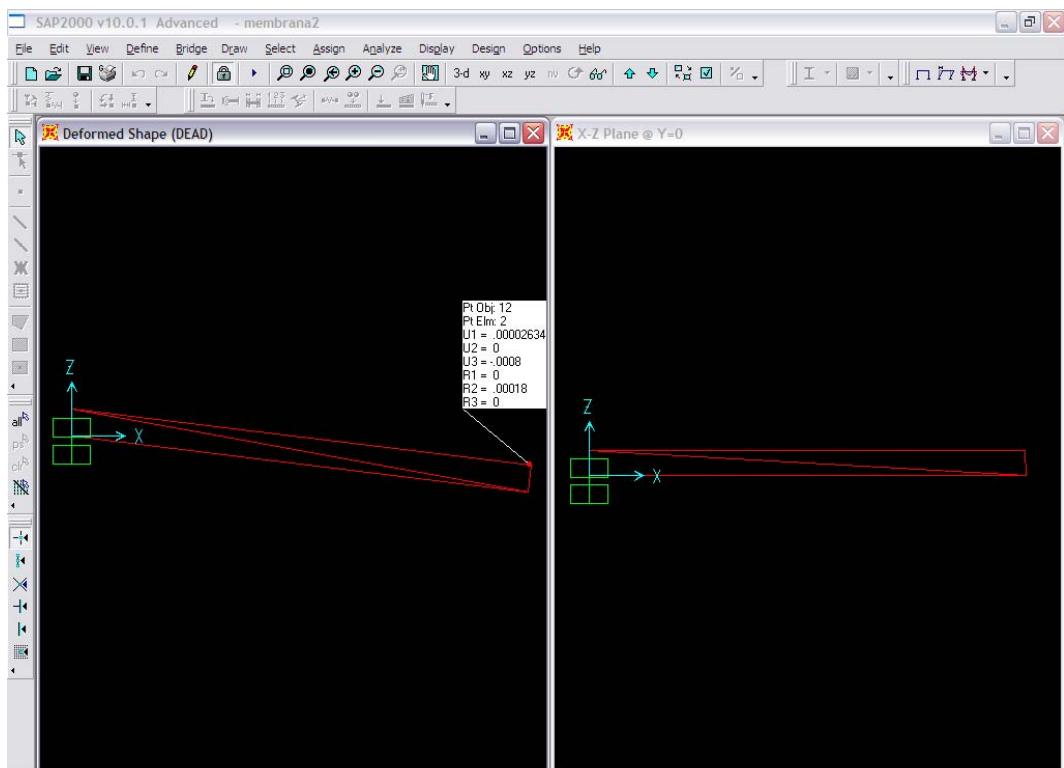
Fig. 3.35 Esfuerzos de la viga en cantiliver.

Ahora se mostrará la manera en la cual refinando la malla se mejora la aproximación de los resultados del ejemplo de la viga en cantiliver.

Esto se hace en el Sap con el elemento Shell (cáscara), el cual se usa para modelar cáscaras, membranas y comportamiento de placas en estructuras planas y tridimensionales. Éste elemento es una formulación de tres a cuatro nodos que combinan el comportamiento membrana y flexión.

### VIGA EN CANTILIVER DEL EJEMPLO 3.10 [P.154.] ELEMENTO TRIANGULAR

Primero veamos los resultados con la membrana de 4 nodos:



Como podemos observar, los resultados de los desplazamientos son los mismos o muy parecidos a los realizados manualmente.

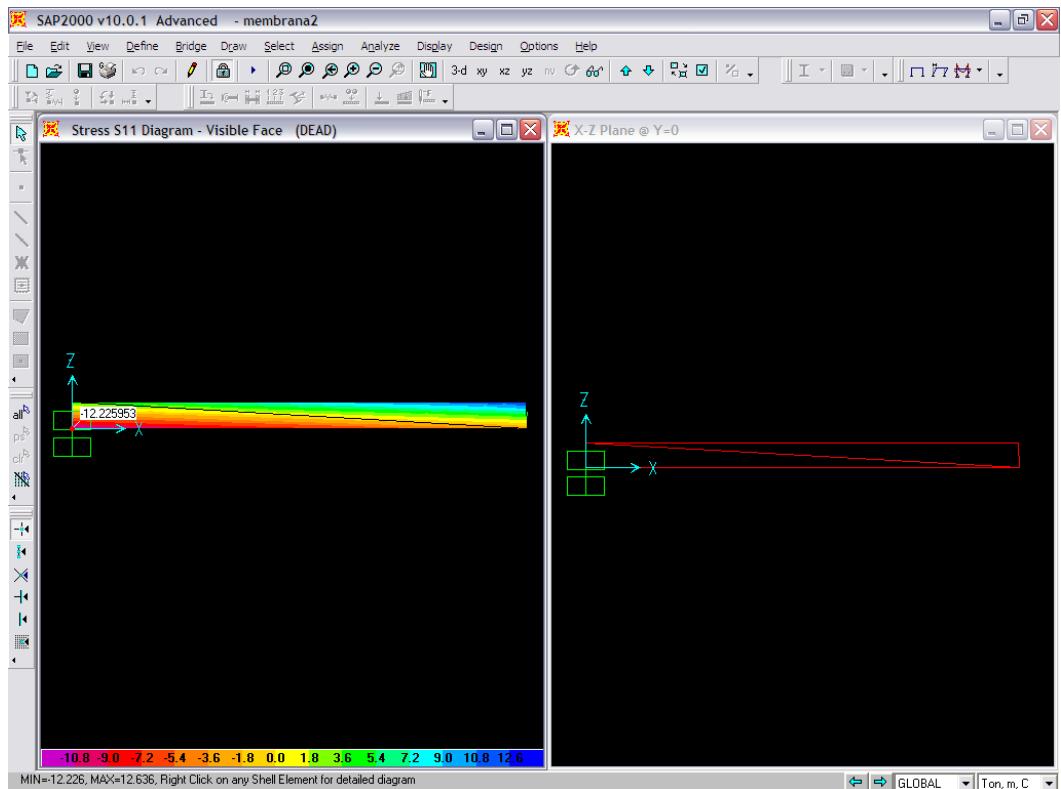
Manualmente [m]

$$\begin{aligned}u_3 &= 0.0000248 \\v_3 &= -0.0007426 \\u_4 &= -0.0000191 \\v_4 &= -0.0007412\end{aligned}$$

En el Sap [m]

$$\begin{aligned}u_3 &= 0.0000263 \\v_3 &= -0.0008154 \\u_4 &= -0.0000205 \\v_4 &= -0.0008148\end{aligned}$$

Ahora veamos los resultados de los esfuerzos



Manualmente [T]

Elemento 1

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -7.6667 \\ \sigma_y &= -1.9166 \\ \sigma_{xy} &= -111.5687\end{aligned}$$

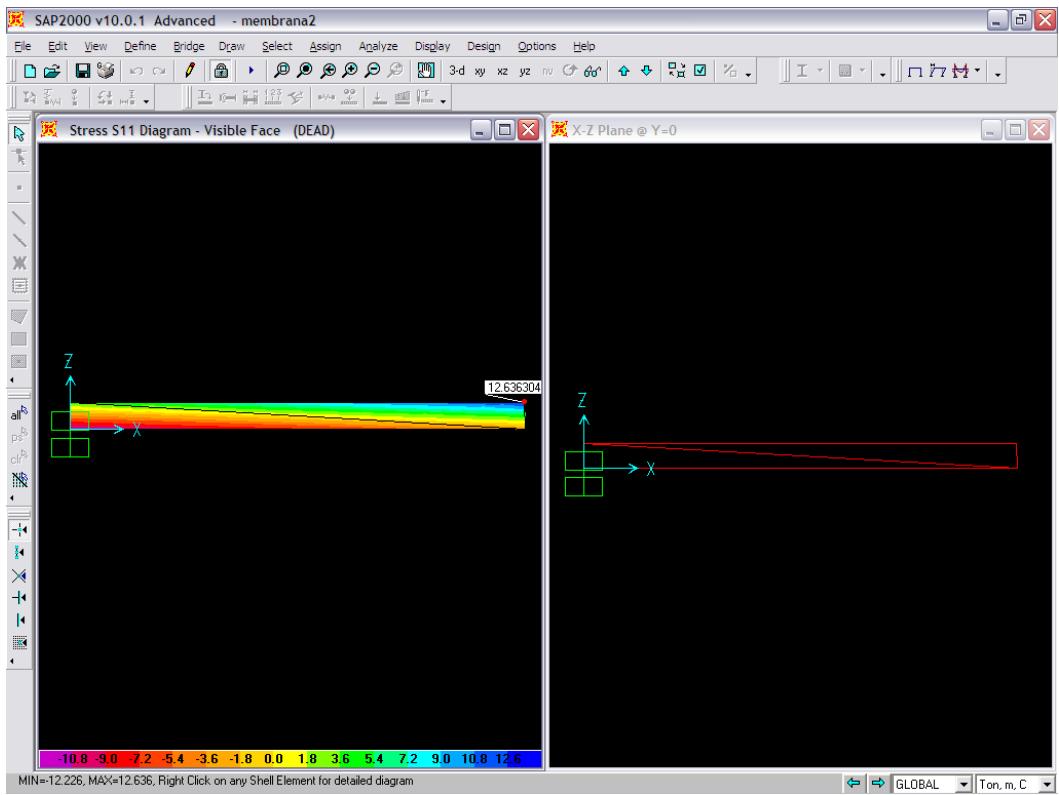
En el Sap [T]

Elemento 1

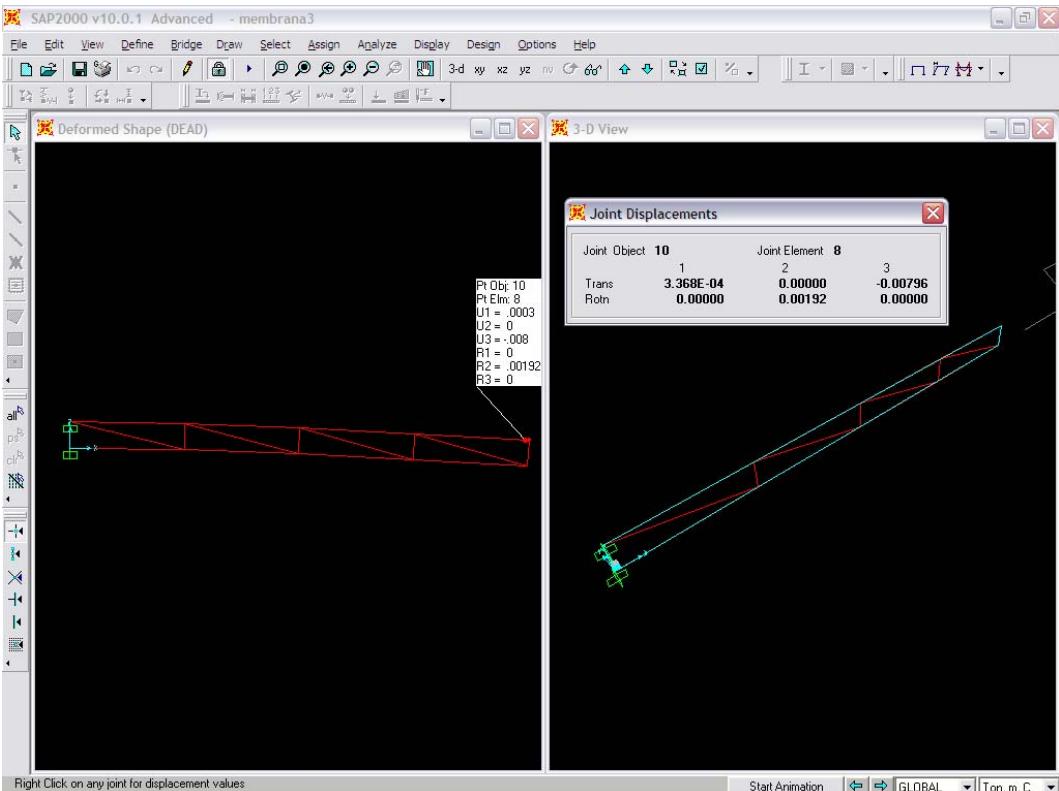
$$\begin{aligned}\sigma_x &= -12.2259 \\ \sigma_y &= -3.0564 \\ \sigma_{xy} &= -93.7723\end{aligned}$$

Elemento 2

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 12.6363 \\ \sigma_y &= -3.9412 \\ \sigma_{xy} &= -29.5200\end{aligned}$$



A continuación veamos los resultados con una membrana de 10 nodos:



Veamos como los resultados se empiezan a aproximar

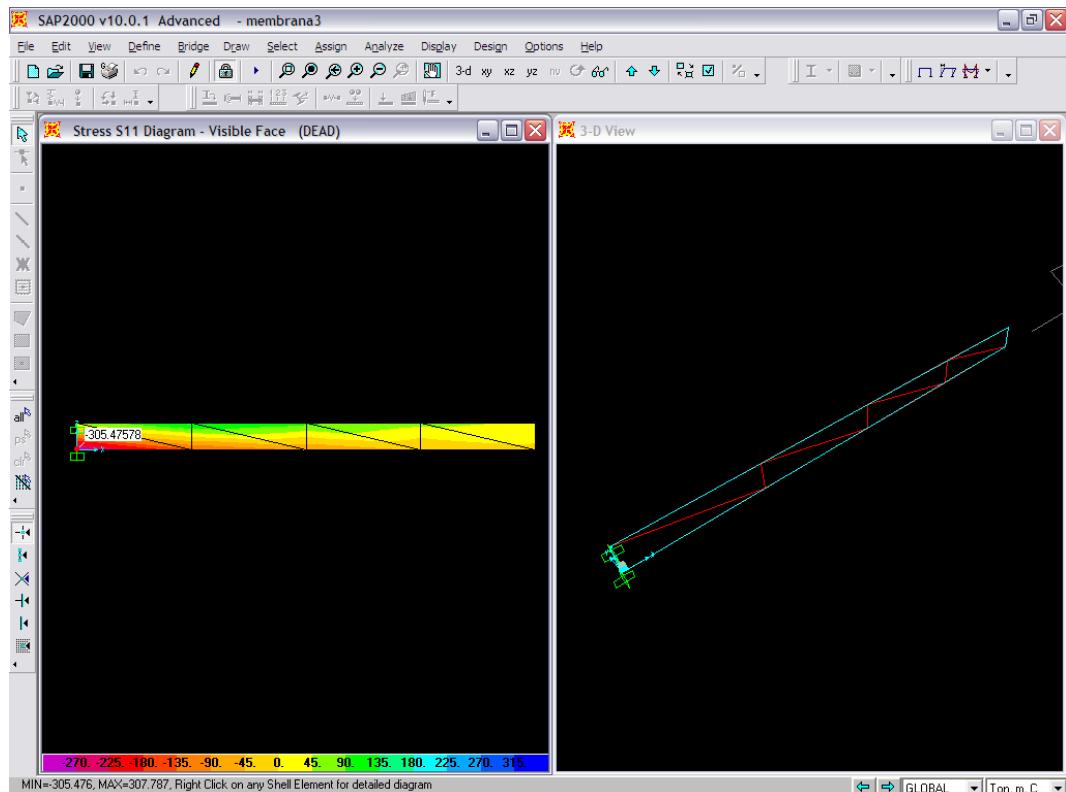
Desplazamientos [m]

$$u_3 = 0.00033$$

$$v_3 = -0.00796$$

$$u_4 = -0.00031$$

$$v_4 = -0.00796$$



Esfuerzos [T]

Elemento 1

$$\sigma_x = -305.4757$$

$$\sigma_y = -76.3689$$

$$\sigma_{xy} = -311.0863$$

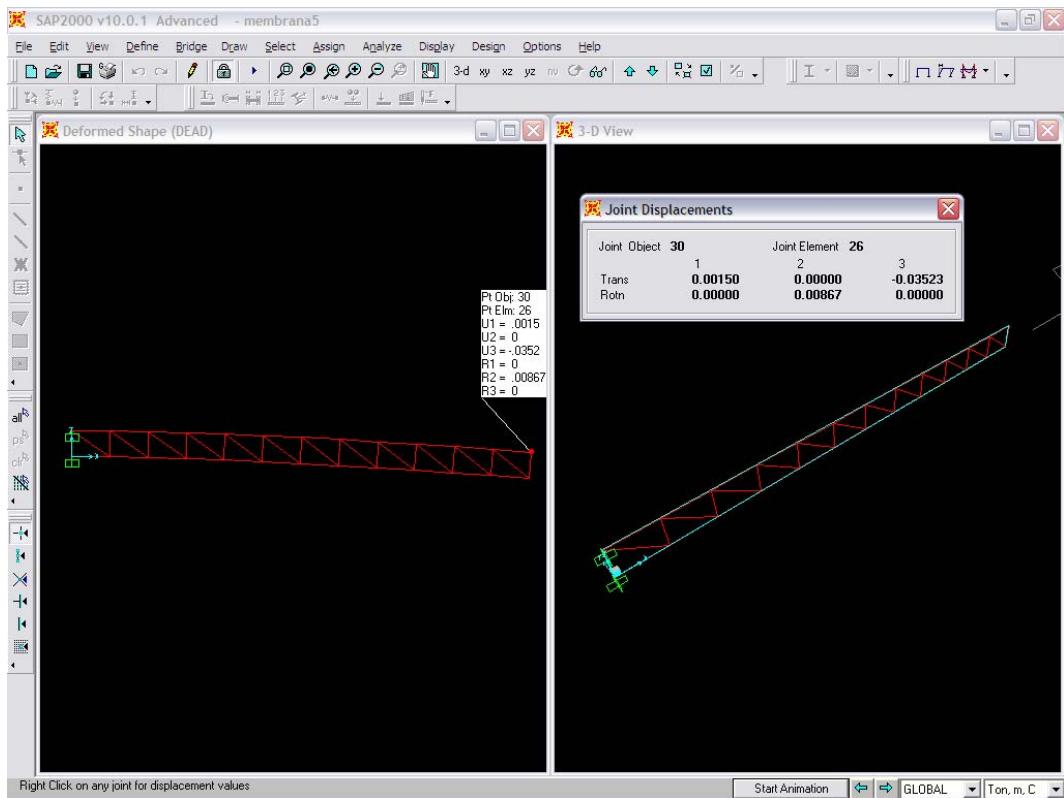
Elemento 8

$$\sigma_x = 39.7258$$

$$\sigma_y = -19.3566$$

$$\sigma_{xy} = -26.2062$$

A continuación veamos los resultados con una membrana de 26 nodos:



Observemos que los resultados se siguen aproximando

Desplazamientos [m]

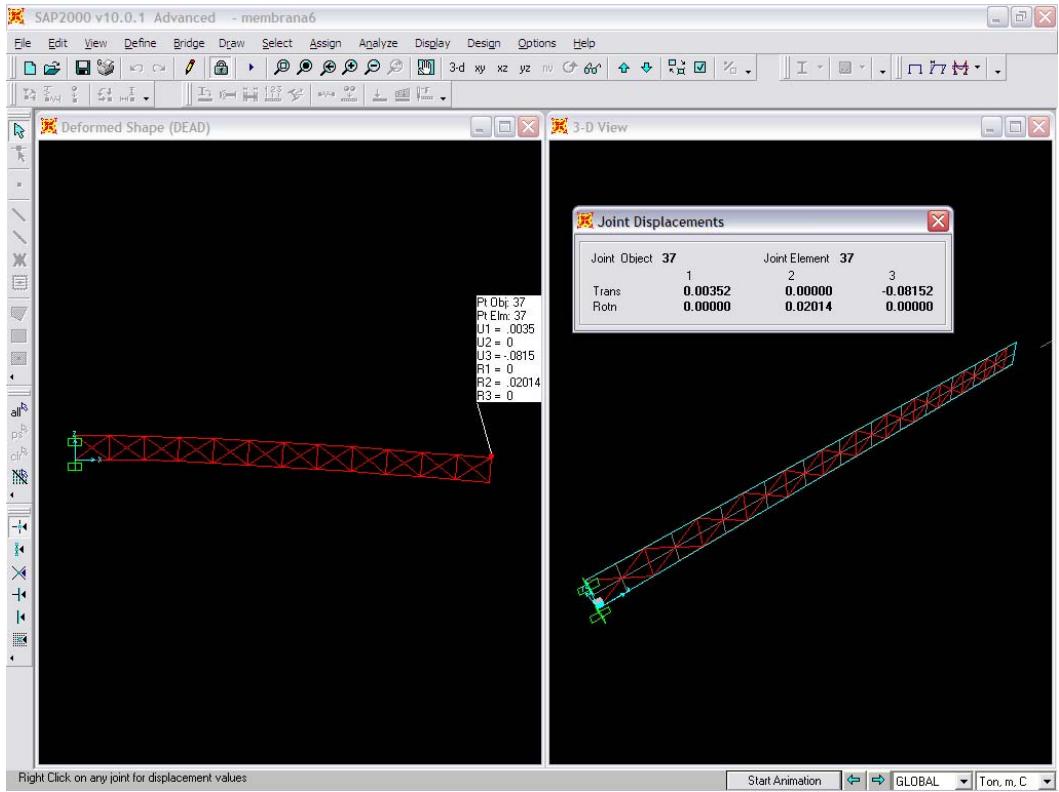
$$u_3 = 0.0015$$

$$v_3 = -0.0352$$

$$u_4 = -0.0015$$

$$v_4 = -0.0352$$

Ahora veamos los resultados con una membrana de 38 nodos:



Desplazamientos [m]

$$u_3 = 0.003$$

$$v_3 = -0.081$$

$$u_4 = -0.003$$

$$v_4 = -0.081$$

Como se ha demostrado, el elemento Shell es muy efectivo en el análisis estructural y en este ejemplo se ha utilizado la forma triangular, sin embargo la formulación cuadrilátera es la más exacta de las dos[1].

[1] Manual Sap2000 con ejercicios en español, P.[55]

## CONCLUSIONES

Históricamente las primeras aplicaciones del método del elemento finito fueron el análisis de deformaciones y esfuerzos en cuerpos y estructuras grandes, además de problemas de flujo de calor, campos magnéticos, etc. Actualmente existen muchos programas comerciales que utilizan como base éste método.

### Conclusiones Particulares

Existen diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales, dentro de los cuales se encuentra el método del elemento finito, que basado en una formulación integral (método de residuos pesados), se utiliza el método de Galerkin como mejor opción ya que es más fácil de programar porque se puede colocar la función de peso igual al polinomio de aproximación.

Los sistemas coordenados se clasifican en: sistemas locales, sistemas naturales y sistemas de área. Estos sistemas nos facilitan la solución de las integrales que necesitan ser resueltas en el método del elemento finito.

Dentro de los elementos unidimensionales y bidimensionales existen una gran cantidad de elementos. Estos elementos pueden ser resueltos por muchos métodos, los cuales derivan las ecuaciones diferenciales para obtener la solución. El método del elemento finito utiliza la integración para resolver los elementos y a partir de encontrar la matriz de rigideces se encuentra la solución de la misma manera.

Existen varias ventajas al utilizar éste método:

- 1.- La solución numérica de ecuaciones diferenciales se puede formular en términos de una integral.
- 2.- El método utiliza funciones continuas para la aproximación de una cantidad o cantidades desconocidas.
- 3.- Como caso particular, al utilizar el método de Galerkin se puede colocar la función de peso igual al polinomio de aproximación con lo cual es más fácil de programar.
- 4.- Una vez encontrada la matriz de rigideces, se es libre en el método a elegir para la solución de la misma.

Además de las ventajas del método se pueden mencionar las aportaciones de este trabajo:

- 1.- Se hizo una recopilación de los conceptos básicos del elemento finito, desde la formulación integral (método de residuos pesados) hasta la integración numérica.
- 2.- Se demostró que de un tema complicado como lo es el elemento finito, se pueden plantear y solucionar problemas de ingeniería civil con la misma facilidad que lo hacen otros métodos.



### Conclusiones Generales

Los ejemplos desarrollados manualmente corresponden a los del programa Sap 2000 V.10, utilizado en éste trabajo, con lo que de alguna manera se puede llegar a demostrar que éste tipo de programas comerciales realizan el mismo procedimiento analítico.

En este trabajo se mostraron las bases de algunos de los elementos como el elemento barra, elemento viga, elemento triangular, etc. Dejando a futuro otros elementos por desarrollar.



## REFERENCIAS

1. Finite Element Analysis, Theory and Problems, George R. Buchanan, Schaum's outline Series, Mc Graw Hill (1995), ISBN 0-07-008714-8
2. Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Klaus.Jurgen Bathe, Prentice Hall Inc (1982), ISBN 0-13-317305-4
3. Numerical Methods in Finite Element Analysis, Klaus.Jurgen Bathe, Edward L. Wilson, Prentice Hall (1976), ISBN 0-13-627190-1
4. Nonlinear Finite Elements for continua and Structural, Ted Belytschko, Wingkam Liu, Brian Moran, John Wiley and Sons (2003), ISBN 0-471-98773-5
5. Introducción al Estudio del Elemento Finito en Ingeniería, segunda edición, Tirupathi R. Chandrupatla, Ashok D. Belegundu, Prentice Hall, Pearson (1999), ISBN 970-17-0260-3
6. El Método De Los Elementos Finitos, O.C. Zienkiewicz, Ed. Reverté, tercera edición (1982)
7. Introduction To The Finite Element Method, S. Desai Chandrakant, John F. Abel, Published by Van Nostrand Reinhold Company, (1972)
8. Análisis Estructural, A. Ghali, A.M. Neville, Editorial Diana, (1983), ISBN 968-13-1480-8
9. Teoría Fundamental De Estructuras, Yuan-Yu Hsieh, Prentice Hall Hispanoamericana, primera edición, (1995)
10. Análisis Estructural, Jack. C. McCormac, Editorial Harla, tercera edición, (1983), ISBN 968-6034-22-6